6.11 基礎公式のまとめ

■微積分公式 • $\int e^x dx = e^x + C$ (以下は積分定数を省略), $\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax}$

- $\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a}$
- $\int \frac{1}{x} dx = \log |x|$
- $\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x, \quad \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a}$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1} \frac{x}{a}$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \log \left(x + \sqrt{1+x^2} \right)$
  ($\sqrt{1+x^2}$ を置換するときは　$x = \tan\theta$とすると複雑になるので $x = \sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$)
- $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \log \left(x + \sqrt{x^2-1} \right)$
  ($\sqrt{x^2-1}$ を置換するときは　$x = \frac{1}{\cos\theta}$とすると複雑になるので $x = \cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$)

2つまとめて　$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+A}} dx = \log(x + \sqrt{x^2+A})$ でもよい.

- $\int e^{f(x)} f'(x)\, dx = e^{f(x)}$
- $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log |f(x)|$
- $\int f(x) e^x\, dx = e^x (f(x) - f'(x) + f''(x) - f'''(x) \cdots)$
- $\int f(x) e^{-x}\, dx = e^{-x} (-f(x) - f'(x) - f''(x) - f'''(x) - \cdots)$

例　$\int x^3 e^{-x} dx = (-x^3 - 3x^2 - 6x - 6) e^{-x}$

- $\int f(x) \cos x\, dx = f(x) \sin x + f'(x) \cos x + f''(x)(-\sin x) + f'''(x)(-\cos x) + \cdots$
  (はじめの $f(x) \sin x$ を出して後は両方とも微分していく)

例　$\int x^3 \cos x dx = x^3 \sin x + 3x^2 \cos x - 6x \sin x - 6 \cos x$

- $\int f(x) \sin x\, dx = f(x)(-\cos x) + f'(x) \sin x + f''(x) \cos x - f'''(x) \sin x \cdots$
- $\int f(x) \log x\, dx = F(x) \log x - \int \frac{1}{x} F(x) dx, \quad F(x) = \int f(x) dx$
- $\frac{d}{dx} \int_{h(x)}^{g(x)} f(x,u) du = f(x, g(x)) g'(x) - f(x, h(x)) h'(x) + \int_{h(x)}^{g(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,u) du$
- $\int_0^a f(a-x) dx = \int_0^a f(x) dx$

例　$\int_0^{\pi/2} (\pi/2 - x) \sin x dx = \int_0^{\pi/2} x \cos x dx = [x \sin x]_0^{\pi/2} + [\cos x]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 1$

$\int_0^{\pi/2} (\pi/2 - x)^2 \cos x dx = \int_0^{\pi/2} x^2 \sin x dx = [x^2(-\cos x)]_0^{\pi/2} + [2x \sin x]_0^{\pi/2} + [2 \cos x]_0^{\pi/2} = \pi - 2$

- (区分求積法) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}) \frac{1}{n} = \int_0^1 f(x) dx$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(a + (b-a)\frac{k}{n}) \frac{b-a}{n} = (b-a) \int_0^1 f(a + (b-a)x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

例 $\lim_{n\to\infty} (\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \log 2$

- 半径 r の球の体積$= \frac{4}{3}\pi r^3$
  半径 r の球の表面積$= 4\pi r^2$

B1

- $\displaystyle\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx = 2\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}a^2$ (半円、$\frac{1}{4}$ 円の面積を考える)
- $\displaystyle\int_0^{\frac{a}{2}}\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{\pi}{12}a^2 + \frac{1}{2}\frac{a}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}a$ (扇形と三角形に分ける)
- $\displaystyle\int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}}\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{\pi}{8}a^2 + \frac{1}{2}\frac{a}{\sqrt{2}}\frac{a}{\sqrt{2}}$
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-tx^2}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{t}}$ $(t>0)$ **(ガウスの公式)**
- $\displaystyle\Gamma(s) = \int_0^{\infty}x^{s-1}e^{-x}\,dx = a\int_0^{\infty}x^{as-1}e^{-x^a}\,dx$

$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$, $n\in\mathbb{N}$ なら $\Gamma(n)=(n-1)!$, $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$

- $\displaystyle B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx = 2\int_0^{\pi/2}\sin^{2a-1}x\cos^{2b-1}x dx = \int_0^{\infty}\frac{x^{a-1}}{(1+x)^{a+b}}dx$

$= \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$

- $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}a_{ij} = \sum_{1\le j\le i\le n}a_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n}a_{ij}$
- $\displaystyle\iint_{0\le x\le y\le a}f(x,y)dxdy = \int_0^a dx\int_x^a f(x,y)dy = \int_0^a dy\int_0^y f(x,y)dx$

(どちらの順序で計算するのかを注意する。勿論、計算が簡単な方を選ぶ)

- $\int\int_D f(x,y)dxdy = \int\int_{D'} f(x(u,v),y(u,v))\frac{dxdy}{dudv}dudv$

(ここで変換は 1 対 1 のときで $\frac{dxdy}{dudv}$ はヤコビアンの絶対値)

■数列の和 など ・ $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=\infty$

- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\log n\right)=\gamma\ (0.58\cdots)$ **(オイラー定数)**
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^\alpha}<+\infty \rightleftarrows \alpha>1$
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6},\quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}=\frac{\pi^4}{90}$
- $\displaystyle\sum_{\text{初項}}^{\text{末項}}\text{等差数列} = \frac{\text{初項}+\text{末項}}{2}\times\text{項数}$

例 $\sum_{i=20}^{50}(3i-1) = \frac{59+149}{2}\times 31$

- $\displaystyle\sum_{\text{初項}}^{\text{末項}}\text{等比数列} = \frac{\text{初項}-\text{末項}\times\text{公比}}{1-\text{公比}}$ (無限等比級数は $\dfrac{\text{初項}}{1-\text{公比}}$)

例 $\sum_{i=20}^{50}(3^{2i-1}) = \frac{3^{39}-3^{101}}{1-3^2}$

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}c=cn,\quad \sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},\quad \sum_{k=1}^{n}k^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(k-1)(k-2)=\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4}$ (一般化できる)
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+3)(k+2)(k+1)k=\frac{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)n}{5}$ (一般化できる)

B2

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=1-\frac{1}{n+1}$
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)})\quad(\because \tfrac{1}{k(k+1)(k+2)}=\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{k(k+1)}-\tfrac{1}{(k+1)(k+2)}))$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}kx^{k-1}=\frac{d}{dx}\frac{1-x^{n+1}}{1-x}=\frac{-(n+1)x^n(1-x)+(1-x^{n+1})}{(1-x)^2}=\frac{1-x^n}{(1-x)^2}-\frac{nx^n}{1-x}$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_{n-k}=\sum_{k=0}^{n}a_k,\ \sum_{k=1}^{n}a_{n-k+1}=\sum_{k=1}^{n}a_k$　　例 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(n-k)^2=\sum_{k=0}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

■三角関数など　• $e^{\sqrt{-1}x}=\cos x+\sqrt{-1}\sin x$ (オイラーの公式)

例 $\cos(x+y)+\sqrt{-1}\sin(x+y)=e^{\sqrt{-1}(x+y)}=e^{\sqrt{-1}x}e^{\sqrt{-1}y}=(\cos x+\sqrt{-1}\sin x)(\cos y+\sqrt{-1}\sin y)$

例 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(\cos kx+\sqrt{-1}\sin kx)=\sum_{k=0}^{n}e^{\sqrt{-1}kx}=\frac{1-e^{\sqrt{-1}(n+1)x}}{1-e^{\sqrt{-1}x}}$

- $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2},\ \sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$
- $(\cos x,\sin x)+(\cos y,\sin y)=2\cos\frac{x-y}{2}(\cos\frac{x+y}{2},\ \sin\frac{x+y}{2})$ (ベクトルの和の図を描くとわかる.)
- $\sin^{-1}x=\alpha\leftrightarrow\sin\alpha=x\cap-\frac{\pi}{2}\leqq\alpha\leqq\frac{\pi}{2}$
- $\cos^{-1}x=\alpha\leftrightarrow\cos\alpha=x\cap 0\leqq\alpha\leqq\pi$
- $\tan^{-1}x=\alpha\leftrightarrow\tan\alpha=x\cap-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$

■ラグランジュの補間法　・ 2 点 $(a,A),(b,B)$ を通る直線の方程式　$y=A\frac{x-b}{a-b}+B\frac{x-a}{b-a}$

3 点 $(a,A),(b,B),(c,C)$ を通る 2 次関数の方程式　$y=A\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+B\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+C\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$

(以降 n 次関数も同様)

■極限　・ $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(1+a/x)^x=\lim_{n\to\infty}(1+a/n)^n=\lim_{x\to 0}(1+ax)^{1/x}=e^a$

- $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$　テーラー展開より、　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}=\frac{1}{6}$
- $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$
- ロピタルの定理　$f(a)=g(a)=0$ で　$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}(=A)$ が存在するならば、$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=A$
- $a>0,b>0$ に対して、$\displaystyle\lim_{x\to\infty}x^a e^{-bx}=0$
- $a>0$ に対して　$\displaystyle\lim_{x\to 0}x^a\log x=0,\ \lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x^a}=0$
- $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}}{n!}=1$　(スターリングの公式)

例 $\displaystyle\lim_{x\downarrow 0}x^x=\lim_{x\downarrow 0}e^{x\log x}=1$

例 $\displaystyle\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$

■組み合わせ論　・ $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k = (1+x)^{n}$[*27], $x=1$ を代入して $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$

・ $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}kx^{k-1} = n(1+x)^{n-1}$[*28], $x=1$ を代入して $\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$

・ $\sum_{k=0}^{l}\binom{n}{k}\binom{m}{l-k} = \binom{m+n}{l}$[*29], $(\because (1+x)^n(1+x)^m = (1+x)^{m+n}$ の両辺の x^l の係数)

・ $\binom{m}{n} = m$ 個のものから n 個のものを選ぶ組み合わせの総数 $=$ (${}_mC_n$ とも書く)

・ $\binom{m+1}{n} = \binom{m}{n} + \binom{m}{n-1}$[*30], $n\binom{m}{n} = m\binom{m-1}{n-1}$[*31]

・ ${}_mH_n = m$ 種類のものから重複をゆるして n 個選ぶ (重複) 組み合わせの総数 $= \binom{m+n-1}{n} = m$ 種類の文字の n 個の積から作られる単項式の個数
($\because m-1$ 個の | と n 個の ∘ を並べた順列と 1 対 1 対応)

・ $\binom{m+n}{n} = (0,0)$ から (m,n) を結ぶ最短経路 (右に 1(ヨ), 上に 1 ずつ進む (タ)) の個数 $= {}_{n+1}H_m = m$ 個のヨの位置を $n+1$ 個の水平な線から重複を許して選ぶ

・ $\binom{m+n}{m} = \sum_{k=0}^{n}\binom{k+m-1}{m-1}$, ($\because$ 最後のヨの y 座標で分類), 前のほうの級数もこれで解釈可能

・ $x_1+x_2+\cdots+x_n = m$ の整数解の個数 $= {}_nH_m$, $x_1+x_2+\cdots+x_n = m$　の自然数解の個数 $= {}_{m-1}C_{n-1}$

・ $\binom{-x}{k} = (-1)^k\binom{x+k-1}{k}$ 非負

・ A を定義域とし、B を値域とする写像全体の個数は重複順列の考えかたより　$\#(B)^{\#(A)}$ 個
ここで　$\#(A)$　は集合 A の要素の個数

・ $\#(B) \geqq \#(A)$ のとき、 A を定義域とし、B を値域とする 1 対 1 写像全体の個数は
${}_{\#(B)}P_{\#(A)} = \frac{\#(B)!}{(\#(B)-\#(A))!}$

・ 多項定理　$(x+y+z)^n = \sum_{0\leqq k,l\leqq n}\frac{n!}{k!l!(n-k-l)!}x^ky^lz^{n-k-l}$

■テーラー展開　• $\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\cdots$　$(|x|<1)$

• $\sum_{k=1}^{\infty}kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$　(上を微分)

• $\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)x^{k-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$　(上を微分)

• $\sum_{k=n-1}^{\infty}k(k-1)\cdots(k-n+2)x^{k-n+1} = \frac{(n-1)!}{(1-x)^n}$

• $\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{n-1}x^k = \sum_{k=0}{}_nH_kx^k = \sum_{k=0}\binom{-n}{k}(-x)^k = (1-x)^{-n}$

• $e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\cdots$　$(-\infty < x < \infty)$

[*27] この 2 項定理の計算によらない組み合わせ論的な説明は以下のとおり。n 人のクラスで　係が　$x+1$ 種類あり、すべての人がどれかの係を一つやるとすると、選び方の総数は重複順列の考え方より、$(x+1)^n$ 通りである。　また、一つの係に注目してその係の人数が $k\,(0\leqq k\leqq n)$ であったとすると、　その係以外の人は $n-k$ 人いるので　選び方の総数は　$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$

[*28] これは上の考え方にさらにひとつの係にはその長も選ぶ (例えば委員を一つの係として委員長もその中から選ぶ) ことを 2 通りに考えればよい

[*29] これは　n 人のクラスと　m 人のクラスから合わせて l 人の委員を選ぶことを　2 通りに見ればよい。

[*30] これは $m+1$ 人のクラスから n 人の委員を選ぶのだが, 特定の人が委員に入る場合と, はいらない場合を考えればよい。

[*31] これは $n-1$ 人の委員と一人の委員長を選ぶが、n 人の委員を選んでからそのなかから委員長を選んでも同じことに気づけばよい。

B4

■コーシーの関数方程式　・　$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が $f(s+t)=f(s)f(t)$　を満たすなら、$\exists a(\in\mathbb{R})$　$f(t)=e^{at}$*32.

・　$f:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ が $f(s+t)=f(s)f(t)$　を満たすなら、$\exists a(\in\mathbb{R})$　$f(t)=a^t$.

■正射影　●　$\vec{x}$の$\vec{a}$への正射影ベクトル $=proj_{\vec{a}}\vec{x}=\frac{\vec{x}\cdot\vec{a}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}$

●　$\vec{x}$の Linear span of $\{\vec{e_1},\vec{e_2}\}$への正射影ベクトル $=proj_{\{\vec{e_1},\vec{e_2}\}}(\vec{x})=(\vec{x}\cdot\vec{e_1})\vec{e_1}+(\vec{x}\cdot\vec{e_2})\vec{e_2}$

ここで　$\vec{e_1},\vec{e_2}$ は正規直交ベクトル、つまり　$|\vec{e_1}|=|\vec{e_2}|=1,\ \vec{e_1}\cdot\vec{e_2}=0$

例 (グラム・シュミットの直交化) 一次独立な $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ から　正規直交ベクトル $\vec{e_1},\ \vec{e_2},\ \vec{e_3}$ を作ると

$\vec{e_1}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|},\ \vec{e_2}=\frac{\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{e_1})\vec{e_1}}{|\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{e_1})\vec{e_1}|},\ \vec{e_3}=\frac{\vec{c}-(\vec{c}\cdot\vec{e_1})\vec{e_1}-(\vec{c}\cdot\vec{e_2})\vec{e_2}}{|(\vec{c}\cdot\vec{e_1})\vec{e_1}-(\vec{c}\cdot\vec{e_2})\vec{e_2}|}$

例　$H=\{X|E(X^2)<\infty\}$ に内積 $\langle X,Y\rangle=E(XY)$　をいれ、グラム・シュミットの直交化より、

$1,X$ から　正規直交ベクトルを作ると $1,X$ の標準化 $=\frac{X-m}{\sigma}$ となる。

すると、　$proj_{\{1,X\}}Y=E(Y)1+E(Y\frac{X-m}{\sigma})\frac{X-m}{\sigma}$ となり、これは回帰直線と一致する。

■常微分方程式　・　$\frac{dy}{dx}=ay,y(0)=c$ の解は　$y(x)=ce^{ax}$

・　$\frac{dy}{dx}=f(y)g(x)$ (変数分離形) は　$\int\frac{dy}{f(y)}dy=\int g(x)dx$ として解く。

・　$\frac{dy}{dx}+g(x)y=h(x)$ は　$\frac{d}{dx}(e^{\int g(x)dx}y)=h(x)e^{\int g(x)dx}$ として両辺を積分

・　$\frac{dy}{dx}=f(\frac{y}{x})$ (同次形) は　$u=\frac{y}{x}$ として　u の微分方程式に直す。

・　a,b は定数として、$\frac{d^2y}{dx^2}+a\frac{dy}{dx}+by=0$ の解は, 特性方程式 $u^2+au+b=0$ の異なる2解を α,β として

$y=Ce^{\alpha x}+De^{\beta x}$　α が重解の場合は　$y=(Cx+D)e^{\alpha x}$

すべての解 $y(x)$ が安定 ($\lim_{x\to\infty}y(x)=0$) であるための必要十分条件は　特性方程式のすべての解の絶対値が1より小さいこと。

$\frac{d^2y}{dx^2}+a\frac{dy}{dx}+by=f(x)$ の解は特殊解を1つ求めて、特殊解+一般解とする。

■極値問題　・　$f(x,y)$ が $(x,y)=(x_0,y_0)$ で極値をとる。$\longrightarrow$ $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=0$

・　(条件付き極値問題、ラグランジュの未定係数法) $g(x,y)=0$ のもとで、$f(x,y)$ が $(x,y)=(x_0,y_0)$ で極値をとる。$\longrightarrow$ $L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y)$ とおき、

$\frac{\partial L}{\partial x}(x_0,y_0,\lambda_0)=\frac{\partial L}{\partial y}(x_0,y_0,\lambda_0)=\frac{\partial L}{\partial \lambda}(x_0,y_0,\lambda_0)=0$

■連立1次方程式　$\vec{a_i},\vec{b}\in\mathbb{R}^3$ として　$(\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_3})\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\vec{b}$ と表せる未知数3個、式の個数3個の連立方程式を考える。掃き出し法は係数行列 $(\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_3})$ を行基本変形を用いて　できるだけ単位行列に近づけて行く。(詳しくは　穴埋め式　線形代数　らくらくワークブック参照)、単位行列に変形できた場合は　$rank((\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_3}))$=$rank((\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_3},\vec{b})=3$ のケースとなり　解が一意的に存在する。また、　解が存在しない $\leftrightarrow$ $rank((\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_3})<rank((\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_3},\vec{b})$ であり、解が存在する　$\leftrightarrow$ $rank((\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_3}))=rank((\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_3},\vec{b})$ であるが、解が存在する場合の解は、$3-rank((\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_3})$ 個の任意定数であらわされる。

また、行列式 $|\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_3}|\neq0$ の場合は　次のクラーメルの公式が成立する。

*32 厳密にいうと　f には、連続性、単調性、原点の近くでの有界性、微分可能性、可測性などの条件のうちのひとつを課さなければならない。

$$x = \frac{|\vec{b}, \vec{a_2}, \vec{a_3}|}{|\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}|}, \quad y = \frac{|\vec{a_1}, \vec{b}, \vec{a_3}|}{|\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}|}, \quad z = \frac{|\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{b}|}{|\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}|}$$

■逆行列 ・ $n \times n$ 行列が逆行列を持つ。$\leftrightarrow$ $\det(A)(= |A| = A$ の行列式$) \neq 0$

・ $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$

・ (逆行列の求め方) 掃き出し法で行基本変形により $A|E \quad \rightarrow \quad E|A^{-1}$ に変形する.

■漸化式 (差分方程式) まず $a_{n+1} = ra_n \longrightarrow a_n = a_0 r^n (= a_1 r^{n-1}) = a_{-m} r^{n+m}$

■$a_{n+1} = ra_n + f(n)$ の場合 特殊解 $b_{n+1} = rb_n + f(n)$ となる b_n を求め、

$$a_{n+1} - b_{n+1} = r(a_n - b_n) \quad \therefore a_n - b_n = (a_0 - b_0) r^n \quad \therefore a_n = b_n + (a_0 - b_0) r^n$$

計算例 1

$$a_{n+1} = 3a_n + 4 \quad (a_0 = 2)$$

$$c = 3c + 4 \longrightarrow c = -2$$

$$a_{n+1} + 2 = 3(a_n + 2) \quad \therefore \ a_n = -2 + (a_0 + 2)3^n = -2 + 4 \cdot 3^n$$

計算例 2

$$a_{n+1} = 3a_n + n^2 \quad (a_0 = 2)$$

$b_{n+1} = 3b_n + n^2 \quad b_n = Cn^2 + Dn + E \quad$ (b_nは 2 次式)

$C(n+1)^2 + D(n+1) + E = 3(Cn^2 + Dn + E) + n^2$より、$C = D = E = -\frac{1}{2}$

$$a_{n+1} - b_{n+1} = 3(a_n - b_n)$$

$$\therefore a_n - b_n = (a_0 - b_0)3^n = (2 + \frac{1}{2})3^n$$

$$\therefore a_n = -\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n - \frac{1}{2} + \frac{5}{2}3^n$$

計算例 3

$$a_{n+1} = 2a_n + 3^n \quad (a_0 = 3)$$

$b_{n+1} = 2b_n + 3^n \longrightarrow b_n = c3^n$とおける　これより、$c = 1$

$$\therefore a_{n+1} - b_{n+1} = 2(a_n - b_n) \quad \therefore \ a_n = b_n + (a_0 - b_0)2^n = 3^n + 2^{n+1}$$

■組み合わせ論

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k=(1+x)^n$[*27], $x=1$ を代入して$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}kx^{k-1}=n(1+x)^{n-1}$[*28], $x=1$ を代入して$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}=n2^{n-1}$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{l}\binom{n}{k}\binom{m}{l-k}=\binom{m+n}{l}$[*29], $(\because (1+x)^n(1+x)^m=(1+x)^{m+n}$の両辺の x^lの係数)
- $\binom{m}{n}=m$ 個のものから n 個のものを選ぶ組み合わせの総数 $=$ (${}_mC_n$とも書く)
- $\binom{m+1}{n}=\binom{m}{n}+\binom{m}{n-1}$[*30], $n\binom{m}{n}=m\binom{m-1}{n-1}$[*31]
- ${}_mH_n=m$ 種類のものから重複をゆるして n 個選ぶ (重複) 組み合わせの総数 $=\binom{m+n-1}{n}=m$ 種類の文字の n 個の積から作られる単項式の個数
  ($\because m-1$ 個の $|$ と n 個の $\circ$ を並べた順列と 1 対 1 対応)
- $\binom{m+n}{n}=(0,0)$ から (m,n) を結ぶ最短経路 (右に 1(ヨ), 上に 1 ずつ進む (タ)) の個数 $={}_{n+1}H_m=m$ 個のヨの位置を $n+1$ 個の水平な線から重複を許して選ぶ
- $\displaystyle\binom{m+n}{m}=\sum_{k=0}^{n}\binom{k+m-1}{m-1}$, ($\because$ 最後のヨの y 座標で分類), 前のほうの級数もこれで解釈可能
- $x_1+x_2+\cdots+x_n=m$ の整数解の個数 $={}_nH_m$, $x_1+x_2+\cdots+x_n=m$　の自然数解の個数 $={}_{m-1}C_{n-1}$
- $\binom{-x}{k}=(-1)^k\binom{x+k-1}{k}$
- A を定義域とし、B を値域とする写像全体の個数は重複順列の考えかたより　$\#(B)^{\#(A)}$ 個
  ここで　$\#(A)$　は集合 A の要素の個数
- $\#(B)\geqq\#(A)$ のとき、 A を定義域とし、B を値域とする 1 対 1 写像全体の個数は
  ${}_{\#(B)}P_{\#(A)}=\frac{\#(B)!}{(\#(B)-\#(A))!}$
- 多項定理　$\displaystyle(x+y+z)^n=\sum_{0\leqq k,l\leqq n}\frac{n!}{k!l!(n-k-l)!}x^ky^lz^{n-k-l}$

■テーラー展開

- $\displaystyle\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots$　$(|x|<1)$
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}kx^{k-1}=\frac{1}{(1-x)^2}$　(上を微分)
- $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)x^{k-2}=\frac{2}{(1-x)^3}$　(上を微分)
- $\displaystyle\sum_{k=n-1}^{\infty}k(k-1)\cdots(k-n+2)x^{k-n+1}=\frac{(n-1)!}{(1-x)^n}$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{n-1}x^k=\sum_{k=0}{}_nH_kx^k=\sum_{k=0}\binom{-n}{k}(-x)^k=(1-x)^{-n}$
- $\displaystyle e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\cdots$　$(-\infty<x<\infty)$

---

*27 この 2 項定理の計算によらない組み合わせ論的な説明は以下のとおり。n 人のクラスで　係が　$x+1$ 種類あり、すべての人がどれかの係を一つやるとすると、選び方の総数は重複順列の考え方より、$(x+1)^n$ 通りである。　また、一つの係に注目してその係の人数が k $(0\leqq k\leqq n)$ であったとすると、　その係以外の人は $n-k$ 人いるので　選び方の総数は　$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$

*28 これは上の考え方にさらにひとつの係にはその長も選ぶ (例えば委員を一つの係として委員長もその中から選ぶ) ことを 2 通りに考えればよい

*29 これは　n 人のクラスと　m 人のクラスから合わせて l 人の委員を選ぶことを　2 通りに見ればよい。

*30 これは $m+1$ 人のクラスから n 人の委員を選ぶのだが, 特定の人が委員に入る場合と, はいらない場合を考えればよい。

*31 これは $n-1$ 人の委員と一人の委員長を選ぶが、n 人の委員を選んでからそのなかから委員長を選んでも同じことに気づけばよい。

B7

- $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \cdots \quad (|x| < 1)$
- $\log \frac{1+x}{1-x} = 2(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \cdots) \quad (|x| < 1)$

例 $\log n = \log \frac{1+\frac{n-1}{n+1}}{1-\frac{n-1}{n+1}} \fallingdotseq 2(\frac{n-1}{n+1} + \frac{1}{3}(\frac{n-1}{n+1})^3 + \cdots)$ で近似値が求まる。

- $(1+x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \binom{\alpha}{3}x^3 \cdots \quad (|x| < 1;\ \alpha \in \mathbf{R})$

ここで、$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha+n-1)}{n!}$

- $\tan^{-1} x = \int_0^x \frac{1}{1+u^2} du = \int_0^x \sum_{k=0}^\infty (-u^2)^k du = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots$
- $\sin^{-1} x = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du = \int_0^x (1 + \frac{1}{2}u^2 + \binom{-1/2}{2}(-u^2)^2 + \cdots) du = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \cdots$

■知っておくと良い近似値 ・ $e^{0.7} \fallingdotseq 2$ (テーラー展開に代入すると良い)

$(\log 2 \fallingdotseq 0.7)$

これより **70 の法則**

$$\left(1 + \frac{r}{100}\right)^{\frac{70}{r}} = \left(\left(1 + \frac{r}{100}\right)^{\frac{100}{r}}\right)^{0.7} \fallingdotseq e^{0.7} \fallingdotseq 2$$

- 同様に $e^{0.4} \fallingdotseq \frac{3}{2}$, $\quad e^{1.1} \fallingdotseq 3$
- $10^3 \fallingdotseq 2^{10} \fallingdotseq e^7$
- $2^{19} \fallingdotseq 3^{12}$

■ 不等式 ・ $e^x \geqq 1 + x$, $(x \in \mathbb{R})$ (等号成立は $x = 0$)

例 $e^{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}} > \Pi_{k=1}^n (1 + \frac{1}{k}) = n + 1$ より、$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k} = \infty$

- $x \geq \log(1+x) \quad (x > -1)$
- $0 < x < \pi/2$ で $\frac{2}{\pi}x < \sin x < x < \tan x$
- (相加・相乗) $a_i \geqq 0$ で $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geqq (a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n}$ (等号成立はすべて等しいとき)

例 n 個の $1 + \frac{1}{n}$ と 1 個の 1 にこれを適用すると、$((1+\frac{1}{n})^n)^{\frac{1}{1+n}} < \frac{n(1+\frac{1}{n})+1}{n} = 1 + \frac{1}{n+1}$ より

$(1+\frac{1}{n})^n < (1+\frac{1}{n+1})^{n+1}$

- (コーシー・シュワルツ) $(\sum a_i b_i)^2 \leqq \sum a_i^2 \sum b_i^2$ (等号成立はベクトルとみなし平行)

例 $(x+2y+3z)^2 \leqq (1^2+2^2+3^2)(x^2+y^2+z^2)$ より、$x^2+y^2+z^2=1$ のもとでの $x+2y+3z$ の最大値$=\sqrt{14}$ (等号は $(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{14}}(1,2,3)$), 最小値=$-\sqrt{14}$ (等号は $(x,y,z) = \frac{-1}{\sqrt{14}}(1,2,3)$)

- $E(X)^2 \leqq E(X^2)$ (等号成立は定数)
- (コーシー・シュワルツ) $E(XY)^2 \leqq E(X^2)E(Y^2)$, (等号成立は $Y = aX$)
- (イエンセン) 下に凸な f(例えば $f'' > 0$) に対して, $f(E(X)) \leqq E(f(X))$

($f'' > 0$ なら等号成立は $X =$ 定数)

- (チェビシェフ) $P(|X| \geqq a) \leqq \frac{E(X^2)}{a^2}$, f が正の値をとるなら $P(f(X) \geqq a) \leqq \frac{E(f(X))}{a}$

$(\because E(f(X)) = E(f(X), f(X) \geqq a) + E(f(X), f(X) < a) \geqq E(f(X), f(X) \geqq a)$

$\geqq E(a, f(X) \geqq a) = aP(f(X) \geqq a))$

また、$P(|X - E(X)| \geqq a) \leqq \frac{V(X)}{a^2}$

これから X_i を $E(X_i) = m$, $V(X_i) = \sigma^2$ なる i.i.d.(独立、同分布) とすると、

$P(|\frac{X_1+\cdots+X_n}{n} - m| \geqq \epsilon) \leqq \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 n}$ となり、大数の弱法則 $\frac{X_1+\cdots+X_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} m$(確率収束) がわかる.

B8

■$a_{n+2}+Aa_{n+1}+Ba_n=0$ **の場合**　特性方程式 $t^2+At+B=0$ の 2 解を $\alpha,\beta\ (\alpha\neq\beta)$ とし、
$a_n=C\alpha^n+D\beta^n$ が解（$\because\ \alpha^{n+2}+A\alpha^{n+1}+B\alpha^n=\alpha^n(\alpha^2+A\alpha+B)=0$ と線型性）
後は、$a_0=C+D, a_1=C\alpha+D\beta$ で定数 C,D を定める
重解、つまり $t^2+At+B=(t-\alpha)^2$ の場合、解と係数の関係より、$\alpha+\alpha=-A$
$a_n=(Cn+D)\alpha^n$ が解
（$\because\ (n+2)\alpha^{n+2}+A(n+1)\alpha^{n+1}+Bn\alpha^n=\alpha^n(\alpha^2+A\alpha+B)+(2\alpha+A)\alpha^{n+1}=0$）

計算例 4

$a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n=0\quad(a_0=5,a_1=12)$

特性方程式は $t^2-5t+6=0$ となり、2 解は 2, 3

$a_n=C2^n+D3^n$ とおき、$a_0=C+D=5,\quad a_1=2C+3D=12$ より、$C=3,D=2$

$\therefore a_n=3\cdot2^n+2\cdot3^n$

■$a_{n+2}+Aa_{n+1}+Ba_n=f(n)$ **の場合**　特殊解 $b_{n+2}+Ab_{n+1}+Bb_n=f(n)$ を求め
$a_{n+2}-b_{n+2}+A(a_{n+1}-b_{n+1})+B(a_n-b_n)=0$ となり、例えば重解を持たない場合は、
$a_n=C\alpha^n+D\beta^n$ つまり、$a_n=b_n+C\alpha^n+D\beta^n$ となり、a_0,a_1 より C,D を求めればよい

計算例 5

$a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n=2\quad(a_0=5,a_1=12)$

特殊解は $c-5c+6c=2\quad\therefore c=1$

$(a_{n+2}-1)-5(a_{n+1}-1)+6(a_n-1)=0$

特性解は 2, 3　$\therefore a_n=1+D2^n+E3^n, a_0=5, a_1=12$ より、

$D=1,E=3\quad\therefore a_n=1+2^n+3^{n+1}$

計算例 6

$a_{n+2}-2a_{n+1}-3a_n=8n\quad(a_0=7,a_1=-1)$

特殊解は $b_n=Cn+D$ より、C,D を求めると、$b_n=-2n$

また、特性解は $t^2-2t-3=0$ を解いて、$t=-1,3\quad\therefore a_n=-2n+E3^n+F(-1)^n$ とおけ

$a_0=7,a_1=-1$ より、$E=2,F=5\quad\therefore a_n=-2n+2\cdot3^n+5(-1)^n$

■**練習問題 6.87**　次を解け

(1) $a_{n+2}-4a_{n+1}+4a_n=3^n, a_0=2, a_1=11$
(2) $a_{n+1}-5a_n=4, a_0=3$
(3) $a_{n+1}-5a_n=4n+1, a_0=3$
(4) $a_{n+1}-5a_n=5^n, a_0=3$ (特殊解は $(Cn+D)5^n$)
(5) $a_{n+2}-a_{n+1}-6a_n=0, a_0=5, a_1=10$

B9

(6) $a_{n+2}-a_{n+1}-6a_n=6n, a_0=-\frac{1}{6}, a_1=\frac{5}{6}$

(7) $a_{n+2}+2a_{n+1}-3a_n=5\cdot 2^n, a_0=2, a_1=3$

(8) $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n, a_0=0, a_1=1$

(9) $a_{n+2}+a_n=0, a_0=1, a_1=0$

(10) $a_{n+3}-4a_{n+2}+a_{n+1}+6a_n=8, a_0=5, a_1=9, a_2=13$

■練習問題 6.88 ギャンブラーの破産問題をこのやり方で解け。つまり、勝つ確率 $\frac{1}{1+\alpha}, \alpha>0$ 負ける確率 $\frac{\alpha}{1+\alpha}$ のゲームに最初の所持金 x\$ で、毎回 1\$ ずつ賭け, 目標金額 N に到達するかまたは破産すれば　ゲームをやめるとする。最初の所持金が $n, (0\leqq n\leqq N)$ のときに最終的に破産する確率を p_n とするとき、p_n の漸化式を立てて解け。

また、ゲームをやめるまでの時間を T としたとき $E(T)$ もここのやり方で計算せよ。

■練習問題 6.89$^{(**)}$ 正しい硬貨を何回も投げる。　初めて　表裏と続けて出るまでの試行回数$=X$ とするとき、　$p_n=P(X=n)$ を求めよ。また、　X の確率母関数 $g_X(t)=E(t^X)$ も求めよ。

(Hint　表が出た後の試行で初めて　表裏と出るまでの試行回数 $=Y$ を合わせて考えよ.)

■練習問題 6.90 お菓子のおまけは A,B,C の 3 種類あり、お菓子を買うごとに確率 $\frac{1}{3}$ で　どれかがもらえる。　初めておまけが　3 種類そろうまでにお菓子を買った個数を　N とするとき、次を求めよ。

(1)$k\in\mathbb{N}$ にたいして　$P(N>k)$　(2)$E(N)$　(3)$\sum_{k=0}^{\infty}kP(N>k)$　(4) $V(N)$

■行列の n 乗　一般に　$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のとき、A^n の計算の仕方。

ケーリーハミルトンより、$(A-\alpha E)(A-\beta E)=0$ （ここで　E は単位行列),

ここで α,β は A の固有値。つまり、$0=|xE-A|=x^2-(a+d)x+ad-bc$ の解。

$P_\alpha P_\beta=0,\ AP_\alpha=\alpha P_\alpha,\ AP_\beta=\beta P_\beta$ などがすぐに分かる。$\alpha\neq\beta$ の時、$P_\alpha=\dfrac{A-\beta E}{\alpha-\beta},\ P_\beta=\dfrac{A-\alpha E}{\beta-\alpha}$ とおくと、$P_\alpha+P_\beta=E$

すると、$A=AE=A(P_\alpha+P_\beta)=\alpha P_\alpha+\beta P_\beta$

$A^2=\alpha AP_\alpha+\beta AP_\beta=\alpha^2P_\alpha+\beta^2P_\beta$

$\vdots$

$A^n=\alpha^nP_\alpha+\beta^nP_\beta=\alpha^n\dfrac{A-\beta E}{\alpha-\beta}+\beta^n\dfrac{A-\alpha E}{\beta-\alpha}$ （スペクトル分解）

一般に、$f(A)=f(\alpha)\dfrac{A-\beta E}{\alpha-\beta}+f(\beta)\dfrac{A-\alpha E}{\beta-\alpha}$

$\alpha=\beta$ の時は、$(A-\alpha E)^2=0$ なので

$$\begin{aligned} A^n &= (\alpha E+(A-\alpha E))^n \\ &= (\alpha E)^n+n(\alpha E)^{n-1}(A-\alpha E)+{}_nC_2(\alpha E)^{n-2}(A-\alpha E)^2+\cdots \\ &= \alpha^nE+n\alpha^{n-1}(A-\alpha E) \end{aligned}$$

また、同様に　$f(A)=f(\alpha)\frac{A-\beta E}{\alpha-\beta}+f(\beta)\frac{A-\alpha E}{\beta-\alpha}$

特に　$e^{tA}=e^{t\alpha}\frac{A-\beta E}{\alpha-\beta}+e^{t\beta}\frac{A-\alpha E}{\beta-\alpha}$

となり、定数係数の連立常微分方程式 $\begin{pmatrix}\frac{dx}{dt}\\ \frac{dy}{dt}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ は　$\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}=e^{tA}\begin{pmatrix}x(0)\\y(0)\end{pmatrix}$ と解ける。また、

漸化式　$a_{n+2}+ba_{n+1}+ca_n=0$ は　$\binom{a_{n+1}}{a_{n+2}}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -c & -b\end{pmatrix}\binom{a_n}{a_{n+1}}=A\binom{a_n}{a_{n+1}}$

と変形できるので　$\binom{a_n}{a_{n+1}}=A^n\binom{a_0}{a_1}$ と行列の n 乗を用いて解ける。　3 次以上についても同様であり、同次形で特殊解を求める必要があるときも行列の固有値を元にそれがわかることを注意しておく。3 次以上については、藤田岳彦・石井昌宏著「穴埋め式線形代数らくらくワークブック参照」

固有値が異なる場合のみ触れておく。　固有値α,β,γがすべて異なるとき

$$A^n=\alpha^n\frac{(A-\beta E)(A-\gamma E)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\beta^n\frac{(A-\gamma E)(A-\alpha E)}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)}+\gamma^n\frac{(A-\alpha E)(A-\beta E)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$$

$$f(A)=f(\alpha)\frac{(A-\beta E)(A-\gamma E)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+f(\beta)\frac{(A-\gamma E)(A-\alpha E)}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)}+f(\gamma)\frac{(A-\alpha E)(A-\beta E)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$$

■解き方のコツ　まず、基本的な数学の知識、特に確率や統計における典型的計算法や基本分布に関する知識を蓄え

十分な計算練習を行うことが必要不可欠である。　その上で

- 問題をよく読み自分のよく知っていることや経験から解法を考える。
- $P(A)$ か余事象の確率 $P(A^c)$ のどちらを計算したら簡単かを考える。
- 分布関数か密度関数か　母関数のどれを選択するのかを考える。
- ガンマ関数や　ベータ関数が使えないかをいつも考える。
- 漸化式や方程式が立てられないかを考える。
- 帰納法や帰納的な考え方が使えないかどうか？
- 対称性に注意して簡単になるのかどうか？
- 計算を簡単にする工夫を行う。　例えば　$\sum_{k=1}^{n}(k+1)k(k-1)$ のような級数で解く。
  指数分布や幾何分布はほとんどの場合テイル確率（しっぽ確率）から計算する。
- 独立性や排反が使えるのか使えないのかをいつも注意する。

■検算のコツ　•　$0\leq P(\ )\leq 1$　(確率を求めたなら、いつでもその値は 0 以上 1 以下)

- $P(a\leq X\leq b)=1\longrightarrow a\leq E(X)\leq b$
- $V(X)\geq 0$　(分散はいついかなる時でも非負。定数を除いて正)
- $n=0,1,2$ を代入して具体的に確める
- 数値の場合、常識的な値になったかどうかを考える
- 確率密度関数を求めた場合
  積分して 1 になるかや非負の値かどうか？
- 分布関数を求めたら、単調増加か？　$F(\infty)=1?$, $F(-\infty)=0?$
- 確率 p を $p=0$ や $p=1$ にしたらどうなるのか？　(極端な場合を考えよ)
- 対称性・非対称性についての検討。

B11