アクチュアリー試験のポイント

1. 微積分の復習

$$\int_a^b \frac{f'(x)}{f(x)}dx = [\log f(x)]_a^b$$
$$\int_a^b f'(x)f(x)dx = [\frac{1}{2}f(x)^2]_a^b$$
$$\int_a^b f'(x)e^{f(x)}dx = [e^{f(x)}]_a^b$$
$$\int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}dx = \Gamma(s)$$
$$\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx = B(m,n) = \frac{\Gamma(n+m)}{\Gamma(n)\Gamma(m)}$$
$$\int_0^\infty e^{-3x}(1-e^{-x})^7 dx = ???$$
$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{x}}e^{-\sqrt{x}}dx = ???$$

2. 部分積分公式

$$\int_a^b e^{-cx}F(x)dx = [-\frac{1}{c}[e^{-cx}\ (F(x) + \frac{1}{c}F'(x) + \frac{1}{c^2}F"(x) + \cdots\ )\ ]_a^b$$

3. 基本的な確率分布

◆　離散型確率変数

超幾何分布

つぼの中に R 個の赤球と B 個の青球が入っている．このとき, n 個を同時に取り出したとき,

確率分布	$P(X=k)$	モーメント母関数	期待値	分散
2 項分布	$\binom{n}{k}p^k q^{n-k}\ (k=0,1,\cdots,n)$	$(pe^t+q)^n$	np	npq
Poisson 分布	$e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\ (k=0,1,\cdots)$	$e^{\lambda(e^\theta-1)}$	λ	λ
幾何分布	$pq^k\ (k=0,1,\cdots)$	$\frac{p}{1-qe^t}$	$\frac{q}{p}$	$\frac{q}{p^2}$
負の 2 項分布	$\binom{n+k-1}{k}p^n q^k\ (k=0,1,\cdots)$	$p^n(1-qe^t)^{-n}$	$n\cdot\frac{q}{p}$	$n\cdot\frac{q}{p^2}$

赤球の個数を X とすると,

$$P(X=k)=\frac{\binom{R}{k}\binom{B}{n-k}}{\binom{R+B}{n}} \qquad (k=0,1,2,\cdots,n)$$

となる. ただし, $n\le R\wedge B$ とする.

このとき, X は**超幾何分布**に従うという.

期待値の計算等には次の関係式を用いる:

$$\sum_{m=0}^{k}\binom{n_1}{m}\binom{n_2}{k-m} = \binom{n_1+n_2}{k}$$

◆ 連続型確率分布

確率分布	確率密度関数	モーメント母関数	期待値	分散
正規分布	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\}$	$e^{\mu\theta+\frac{1}{2}\sigma^2\theta^2}$	μ	σ^2
指数分布	$\lambda e^{-\lambda x}(x>0)$	$\frac{\lambda}{\lambda-\theta}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
一様分布	$\frac{1}{b-a}\ (a<x<b)$	$\frac{e^{\theta b}-e^{\theta a}}{\theta(b-a)}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
χ^2 分布 χ^2_n	$\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{1}{2}x}\ (x>0)$	$\frac{1}{(1-2t)^{\frac{n}{2}}}$	n	$2n$

Convolution の計算

X_1, X_2 が独立でそれぞれ, $f_1(x_1), f_2(x_2)$ という p.d.f. をもつ. このとき, $Z=X_1+X_2$ の p.d.f. は

$$f_Z(z)=f_1*f_2(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(z-u)f_2(u)du$$

Ex X_1, X_2, X_3 が独立で U(0,1) に従うとき, $Z=X_1+X_2+X_3$ の p.d.f. を求めよ.

生保数理の Point

現価計算のルール：

(1) 時点 0 での価値 A を時点 n での価値に変換すると $(1+i)^n A$

(2) 時点 n での価値を時点 0 での価値に変換すると $v^n A$

$$v = \frac{1}{1+i}：\text{現価率}$$

定期保険の一次払い保険料

定期保険の一次払い保険料=**支払われる保険金の現価の期待値**

$$A^{1}_{x:\overline{n}|} \ = \ vq_x \ + \ v^2{}_{1|}q_x \ + \ \cdots \ v^n{}_{n-1|}q_x$$

生命年金の現価

$$\begin{aligned}\ddot{a}_{x:\overline{n}|} \ &= \ \text{支払われる年金の現価の期待値} \\ &= 1 + vp_x + v^2{}_2p_x + \cdots + v^{n-1}{}_{n-1}p_x\end{aligned}$$

◎ $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ を死亡率を用いて表現すると？

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n} \ddot{a}_{\overline{t}|}\ {}_{t-1|}q_x + \ddot{a}_{\overline{n}|}{}_np_x$$

$$(I\ddot{a})_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n} \boxed{\quad (A) \quad}\ {}_{t-1|}q_x \ + \ \boxed{\quad (B) \quad}\ {}_np_x$$

◎ 遺族年金現価　$\ddot{a}_{\overline{n}|} - \ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ とは

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} - \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n} v^t{}_{t-1|}q_x \ddot{a}_{\overline{n-t}|}$$

$$(I\ddot{a})_{\overline{n}|} - (I\ddot{a})_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=1}^{n} v^t {}_{t-1|}q_x \boxed{\quad (C) \quad}$$

$$\bar{a}_k un - (\bar{I}\bar{a})_{x:\overline{n}|} = \int_0^n \boxed{\quad (D) \quad} \ {}_tp_x \mu_{x+t} dt$$

◎　養老保険一次払い保険料と生命年金現価との関係

$$A_{x:\overline{n}|} \ = \ 1 - d\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$$
$$\bar{A}_{x:\overline{n}|} \ = \ 1 - \boxed{\quad (E) \quad}$$

◎ 契約期間を二つに分けるとどうなるか？

$$\ddot{a}_{30:\overline{20}|} = \ddot{a}_{30:\overline{10}|} \ + \boxed{\quad (F) \quad}$$
$$A^1_{20:\overline{30}|} = A_{20:\overline{10}|} \ + \boxed{\quad (G) \quad} \ + \ {}_{20|}A_{30:\overline{10}|}$$
$$(I\ddot{a})_{30:\overline{20}|} = (I\ddot{a})_{30:\overline{10}|} + A_{30:\,\overset{1}{\overline{10}|}} \boxed{\qquad (H) \qquad}$$

◎ 連合生命保険：論理性が必要とされる問題が出題される！

Ex 30 歳の親と 5 歳の子供を被保険者とする保険で, 子供が死亡したときには年度末に保険金 1 を支払う. 保険料は年払いで払い込まれる。ただし子供が 22 歳に達するまでに親が死亡したときは保険料の払い込みを免除する. しかし, 子供が２５歳に達したときから子供の責任で保険料の払い込みが再開する.

◎　就業-就業不能問題は確実に点がとれる！