ＯＬＩＳ　―　琉球大学理学部　　保険フォーラム

講　演

	社会に出て役立つ数学	

2014 年 1 月 25 日（土）

大同火災海上保険株式会社　保険計理人

琉球大学　客員教授　会澤　春久

はじめに

「クリティカル・シンキング」

⇩

「健全な批判精神を持った客観的な思考」

○クリティカル・シンキングを推し進めるための３つの基本姿勢

①目的は何かを常に意識する。

②自他に思考のクセがあることを前提に考える。

③問い続ける。

＜クリティカル・シンキングの効用＞

①それまでできなかった斬新な発想ができる
②それまで見落とされていた機会や脅威に気づく
③相手の言いたいことやその前提を的確に理解できる
④会議や議論を効果的に進め、集団としてより良い思考決定をすることができる
⑤説得や交渉、部下のコーチングなどがうまくできる

○北城恪太郎氏（日本ＩＢＭ株式会社相談役）の言葉

・企業は新しいことにチャレンジする人材を求めている。

・企業の強さの源泉は「人材」である。

・単に知識でなく、実践の場で活用できるスキルが大切

・そのためには、継続的な学習が必要

・忙しいからと学ばない者は、暇があっても学ばない。　（中国の 2000 年前の言い伝え）

・自らが主体的に考える人材を、今、企業は求めている。

＜　目　次　＞

Ｑ１．リンダ問題

『リンダは 31 歳の独身女性。非常に知的で、はっきりものを言う。大学時代は哲学を専攻しており、学生の頃は社会主義と差別問題に関する活動に深く関わり、核兵器反対のデモにも参加したことがある。』

リンダの今の職業は？　可能性が高いのはどっち？

⇩

Ａ：彼女は銀行員である。

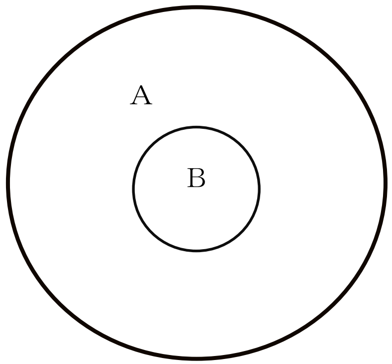
Ｂ：彼女は銀行員で、女性運動で活動している。

［ 解答 ］

　これは、「リンダ問題」と呼ばれる事例です。「クリティカル・シンキング（グロービスＭＢＡの教材）」の中にある有名な問題。

　集合論を学んだ経験があれば、すぐに分かったと思いますが、どちらがより可能性が高いかという確率の問題として考えれば、答えは明らか。

　つまり、ＢはＡの部分集合ですから、当然、確率としてはＡの方が高いはずですから、正解はＡです。



　ところが、多くの人はＢの確率の方が高いと錯覚してしまいます。これって、マジメな方ほど引っかかるようになっているみたいです。

⇩

直感に頼るだけではなく、「何に対する何の比率か」と考えることが大切。

Ｑ２．ガンの検診率の落とし穴

会社の同僚のＹさんが 98%正確と言われているガン検診で「胃がんの疑いがある」と診断されました。これって深刻に受け止めるべき？

[解答]

例えば、1 万人が 98%正確な集団検診を受けたとして、そのうち、50 人（0.5%）が実際に胃がんだと仮定します。

⇩

50 人×0.98＝49 人が、胃がんの疑いがありと診断

（残り 1 人は本当は胃がんに罹っているのに「疑いない」と診断されてしまう）

1 万人のうち、実際には胃がんでない残り 9,950 人についても、

9,950×0.98＝9,751 人が疑いなしと診断

（残り 199 人（＝9,950－9,751）が胃がんの疑いありと診断される）

したがって、胃がんの疑いがあると診断されるのは？

⇩

全部で 49＋199＝248 人

結局、「胃がんの疑いがある」と診断されても、実際に胃がんの人は、

49÷248＝19.8%に過ぎない。

Ｑ３．大学受験と合格率のウソ、本当？

　ある受験生Ａ君の予備校における模擬試験の結果、Ａ大学の合格率が10%、Ｂ大学が20%、Ｃ大学が30%、Ｄ大学が40%、Ｅ大学が50%であることが分かっているものとします。　Ａ君は、たかだか、良くて50%の合格率だとすると、合格は難しいでしょうか？

　さて、Ａ君がＡ、Ｂ、Ｃ、Ｄ、Ｅ大学のいずれかに合格する確率はいくらでしょうか？

[解答]

それぞれの大学に合格する確率は、

$$P(A)=0.10,\quad P(B)=0.20,\quad P(C)=0.30,\ P(D)=0.40,\quad P(E)=0.50$$

それぞれの大学に不合格となる確率は？

その余事象となり、$1-P(A)=1-0.10=0.9$、以下同じ。

それぞれ、90%、80%、70%、60%、50%

⇩

よって、すべての大学に不合格となる確率は？

$$0.9\times0.8\times0.7\times0.6\times0.5=0.15$$

つまり、A君が少なくともどこかの大学に合格する確率は、その補集合であるから、

$$1-0.15=0.85$$

⇩

つまり、85%の確率でどこかの大学に入れることになる。

これが、数学的な考え方です。　しかし、ここにも落とし穴があります。

Ｑ４．πを求めるには、ピザパイを使う？

　ゆとり教育の弊害の例として、象徴的な話題を述べてみたいと思います。小学校高学年で学ぶ円周率πについて考えて見ます。学校の教育現場で、生徒が覚えにくいからと円周率をπ＝３と教えていたことがありました。これじゃ余りにもアバウト過ぎるとして、さすがに長くは続かなかったのですが、これを「３.１４」に戻せば済むというような単純な問題ではないのです。

大切なポイントは、

π＝３で計算すれば、 『円に内接する三角形の合計の面積の方が円の面積よりも大きくなる』

という、おかしな結果が生じてしまうことに疑問を持つことなのです。

これこそが考える力なのです。

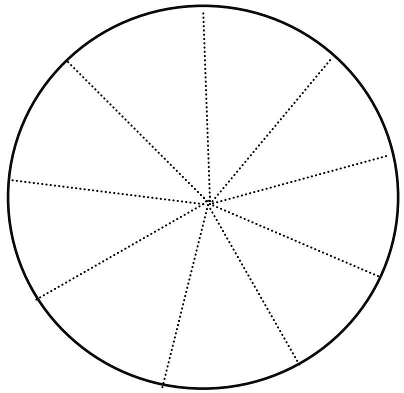
[解答]

たとえば、半径１の円の面積はπですが、円をピザパイのように１８等分すると、底辺が 0.3473（＝sin10° ×2 倍)、高さが 0.9848（＝cos10° ）の内接する三角形が１８個出来上がります。合計の面積は？

3.0782（＝{0.3473×0.9848÷2}×18)

これはπ＝3.00 で計算した場合の円の面積を明らかに上回っている。

おかしな結果が生じたのは、π＝3.00 で計算したから



[上級編]

さら上級の考え方ができる学生は、πとは3.1415･･･のように、ずっと割り切れない数字という概念が理解できることが大切。

このπの値を誰でもパソコンを使って簡単に求めることができる。

少し専門的になるが、以下のとおり。

①区間[0,1]から一様乱数を一つ発生させる。その値を x とおく。

②別途、区間[0,1]から一様乱数を一つ発生させる。その値を y とおく。

③ $z=\sqrt{x^2+y^2}$ を計算する。

④ $z \leq 1$ を満たす場合、その都度、1カウントする。(z＞1ならば、カウントしない。)

⑤これを例えば、1万回繰り返す。

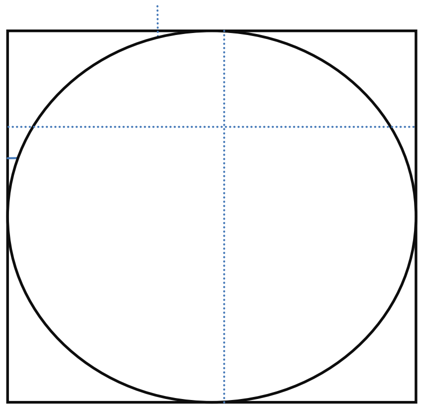
⑥　④を満たした回数を n とおけば、πは、

$$4\times\frac{n}{10{,}000}$$ により求めることができる。

これは、円に外接する正四辺形を考えたとき、

割合（＝円の面積／正四辺形）が 0.785･･･

（＝n／10,000）に近い値になることを利用している。



Q５．同じ誕生日は　運命の出会い？

人との出会いの中で、偶然に自分の誕生日と同じ方に出会って、妙に盛り上がることがあります。それでは、偶然に集められた集団（例えば、学校のクラス仲間）の中で、同じ誕生日の人がいる確率が半分を超えるのは何人ぐらいの集団になったときでしょうか。

[解答]

1 年は 365 日であって、人間の誕生日は、この 365 日のどの日にも平均して分布していると仮定する（ただし、2 月 29 日の閏年生まれは考えないこととします)。

まず、r 人の人たちの誕生日がすべて異なる確率 q_r を求めよう。

r 人の人たちの誕生日の起こり方は、全部で

$$365\times365\times\cdot\cdot\cdot\times365=365^r$$ 通りであり、

このうち r 人の誕生日がすべて異なるのは、

$${}_{365}P_r=365\times(365-1)\times\cdot\cdot\cdot\times\left(365-(r-1)\right)$$ 通り

であるから、r 人の誕生日がすべて異なる確率は

$$q_r=\frac{{}_{365}P_r}{365^r}=\left(1-\frac{1}{365}\right)\left(1-\frac{2}{365}\right)\cdot\cdot\cdot\left(1-\frac{\mathrm{r}-1}{365}\right)$$

したがって、少なくても一組は同じ誕生日の人がいる確率 p_r は、

$$p_r=1-q_r=1-\left(1-\frac{1}{365}\right)\left(1-\frac{2}{365}\right)\cdot\cdot\cdot\left(1-\frac{\mathrm{r}-1}{365}\right)$$

これから、r の値を適当に代入して、p_r が 50％の確率を超える値を求めればよい。

しかし、このままの式だと、ちょっと求めにくいので、

近似式　$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2$　（$x \neq 0$）を用いて、式を簡略化する。

ここで、$\log q_r = \log\left(1 - \frac{1}{365}\right) + \log\left(1 - \frac{2}{365}\right) + \cdots + \log\left(1 - \frac{r-1}{365}\right)$

近似式　$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2$　を用いて、

$$= \sum_{k=1}^{r-1} \log\left(1 - \frac{k}{365}\right) \approx \sum_{k=1}^{r-1} \left\{ -\frac{k}{365} - \frac{1}{2}\left(-\frac{k}{365}\right)^2 \right\}$$

$$= -\frac{1}{365} \cdot \frac{r(r-1)}{2} - \frac{1}{2 \times 365^2} \cdot \frac{1}{6} r(r-1)(2r-1)$$

したがって、$r = 22, 23, \cdots$ を代入して計算すれば、

$\log q_{22} = -0.645 \quad \Rightarrow \quad q_{22} = 0.524$、$p_{22} = 0.476$

$\log q_{23} = -0.707 \quad \Rightarrow \quad q_{23} = 0.493$、$p_{23} = 0.507$

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

$$\log q_{60} = -5.113 \quad \Rightarrow \quad q_{60} = 0.006 、\ p_{60} = 0.994$$

以上から、23 人以上いれば、同じ誕生日の人がいる確率が半分以上となることが分かった。

Ｑ６．お見合いで美女を射止めるには？

　あなたには４人の女性のお見合い相手がいて、一人ずつ順番にお見合いするものといたします。

　最初のお見合い相手に即決してしまったら、二番目以降にもっと自分がお気に入りの美女が登場してくるかもしれません。さてどうしたら最も自分のお気に入りの女性をゲットできるでしょうか？

[解答]

　　その答えは、ズバリ!

「**最初のお見合い相手はとにかくお断りする。**」

ことだそうです。２番目以降の女性については、それ以前の女性よりも気に入ったらその段階で決定すると良い。

　お見合い相手の女性をＡ，Ｂ，Ｃ，Ｄとして、この順番で自分が気に入ったものとする。　女性の組合せのパターンは、4×3×2×1＝24 通り。

　この方法を採った場合、一番お気に入りの女性であるＡを選ぶ組合せは、

Ｂ**Ａ**ＣＤ、Ｂ**Ａ**ＤＣ、ＢＣ**Ａ**Ｄ、ＢＣＤ**Ａ**、ＢＤ**Ａ**Ｃ、ＢＤＣ**Ａ**、

Ｃ**Ａ**ＢＤ、Ｃ**Ａ**ＤＢ、ＣＤ**Ａ**Ｂ、

Ｄ**Ａ**ＢＣ、Ｄ**Ａ**ＣＢ　の順序で回った 11 通り。

次に、二番目にお気に入りの女性Ｂを選ぶ組合せは、

ＡＣＤ**Ｂ**、ＡＤＣ**Ｂ**、⇒　途中までＡより気に入らないが、

最後の一人しか残っていないので、Ｂを選択

Ｃ**Ｂ**ＡＤ、Ｃ**Ｂ**ＤＡ、ＣＤ**Ｂ**Ａ、

Ｄ**Ｂ**ＡＣ、Ｄ**Ｂ**ＣＡ　の順序の７通り。

つまり、お気に入りの方から２番目までの女性をゲットできる確率は、

$$\frac{11+7}{24}=0.75\rightarrow \quad 75\%$$

実に高い確率となる。

Q7. 宝くじに良く当たる人のウソ、本当？

****

宝くじ、高額“当せんモデル像”とは？

2013年5月12日（日）08:00

(ORICON STYLE)　　　　　　　　　○○銀行調査

****

宝くじを買って1,000万円以上の高額当せん！

まるで夢の様な話だが、そんな奇跡を掴む“高額当せん者”たちは、もちろん実在する。○○銀行が5月8日、平成24年度に1,000万円以上の当せん金の換金に訪れた896人を対象に実施した『平成24年度 宝くじ長者白書』を発表した。当せん者が多い世代、当せん者に多い星座などから導きだされた“当せんモデル像”とは？

まず、男女・世代別で当せん者の分布をみていくと、男性で最も多かったのは全体の43％を占めた【60歳以上】（250人）。2位は【50代】（109人）、3位は【40代】（106人）。

女性もまったく同じ順番で、1位【60歳以上】（120人）、2位【50代】（84人）、3位【40代】（60人）が並んだ。

さらに星座別にみていくと、1位は【天秤座】（91人）、次いで2位に【水瓶座】（89人）、3位【牡牛座】（85人）がTOP3に。ワーストは62人の【さそり座】だった。

続けて購入歴をみてみると、最多は622人の【10年以上】だった。

以上の結果をふまえ、同調査では“当せんモデル人間像”を発表。

男女共に購入歴10年以上で、男性は「60歳以上で水瓶座のイニシャルK.S」、女性は「60歳以上、牡牛座のイニシャルK.K」と結論づけている。

＊＊

[解答]

でも、これって、少しおかしいと思いませんか？

天下の○○銀行による、平成24年度に1,000万円以上の当せん金の換金に訪れた896人を対象に実施した調査結果とありますが、

自分は「60歳以上の男性で水瓶座のイニシャルK.Sだから、宝くじに当たる確率が高い。」なんて本気で考えている能天気な方はいないでしょうね。

この調査のおかしさはすぐに気付くと思います。

宝くじを購入したそもそもの母集団が全く無視されている。

男女の世代別の当選者は、いずれも60歳以上が圧倒的に多い（全体の43％）とあるが、大体、宝くじを購入し続けるような金銭的に余裕がある方は、今の日本では60歳以上の方々が圧倒的に多いはずだから、当選者も60歳以上が多いのは当たり前。

次に、星座運との関係を述べていますが、全部で12星座ありますから、896人を12で割ると、平均が75で、1位の【天秤座】（91人）は際立って多いとは言えない。さらに2位の【水瓶座】（89人）からはわずか2人しか離れておらず、ワーストは【さそり座】の62人のだったとあるが、この程度のバラツキでは、統計的検定を行えば、とくに有意差があるとは言えないとの結論になるはず（有意水準５％）。ましてや、イニシャルのK.S（男性）、女性（K.K）の方が宝くじに当選する確率が高いなんて全くのこじつけにすぎない。

おそらく、〇〇銀行でも、こうしたことは十分分かっていて、単なる話題性を高めるための演出効果を狙っているものとは思うが、ちょっと低レベルなような気がする。こうした、統計学の基礎を全く無視したような記事を読んで、読者がそれを真に受けるとしたら、とても恐ろしいこと。

Ｑ８．レスポンス率は本当に高まっているの？

一般的に、新聞折込チラシの反応率が 0.1～0.2％であるのに比べ、ＤＭハガキの反応率は 3～15％と高いと言われているが、それでもやり方(商品魅力や特典の提供)や顧客の絞込みなどの工夫によって、これだけのバラツキが出ることにはビックリ。

なにしろ、ＤＭは、配送費用も含めると、安くても１通 100 円かかるそうです。仮に 1,000 通では 10 万円にもなるから、決してバカにならない額。従って、販売業者は、どうやったらレスポンス率を高めることができるか、あの手この手の知恵を絞っている。

ところで、大同火災でも、「事故対応サービスに関するお客さまアンケート」を毎年実施している。事故に遭われて、弊社のサービスを受けた方々を対象に顧客満足度調査のためにアンケートを実施しているが、2012 年度の返信率は 4.75％であった。

過去３年度の返信率の推移をみると、下表のとおり。

2010 年度	2011 年度	2012 年度
4.15%	4.47%	4.75%

◇郵送件数：33,842 件　　◇返信件数：1,608 件

2012 年度の返信率は 4.75%であり、2011 年度に比べて 0.28%上昇している。数字の上では 3 年連続して上昇しているが、本質的な増加傾向にあると言えるのかを検定してみよう。

[解答]

レスポンス率は、統計学上の「誤差範囲」を含んでいる。それを示すと以下のとおり（ただし、信頼度 95%）。

$$誤差範囲 = 1.96 \times \sqrt{\frac{レスポンス率 p \times (1 - レスポンス率 p)}{サンプル数 n}}$$

これは、回答件数を k とおけば、k は二項分布 $B(n,p)$ に従うことを利用している。

つまり、$B(n,p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ であるので、期待値は np 、分散は $np(1-p)$ となる。

したがって、ドモアブル・ラプラスの定理を使って、

$Y = \dfrac{k - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ は、標準正規分布 $N(0,1)$ に従うことを利用している。

つまり、 $\bar{Y} = \frac{Y}{n} = \frac{k/n - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$ は、 $P\left(\left|\bar{Y}\right| \le u(0.025)\right) = 0.95 \Rightarrow$

$$P\left(p - 1.96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \le \hat{p} \le p + 1.96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right) = 0.95$$

ここで、 $p = 0.0475,\quad n = 33{,}842$ を代入して、具体的に計算してみると、

$0.0452 \le \hat{p} \le 0.0498$ の範囲に入ることが分かる。

よって、前年度の返信率が 4.47%であるから、明らかに返信率は高まっていると言えので、ホットしています（信頼度 95%）。

また、上の式を用いれば、許容誤差を±○○以内に収まるようにするには、サンプル数がどれくらい必要になるかを逆算することができる。

$$サンプル数 = \frac{1.96^2 \times p(1-p)}{（許容）誤差範囲^2}$$

上記の大同火災の「事故対応サービスに関するお客さまアンケート」の例を取り上げてみると、誤差範囲を±0.5%以内に収まるようにするには、サンプル数をどれくらいにする必要があるかを求めてみると、

$p = 0.5\%$ を上式に代入して、

$$サンプル数 = \frac{1.96^2 \times 0.0475(1-0.0475)}{0.005^2} = 6{,}953$$

つまり、6, 953 以上あればよいことが分かる。

Ｑ９．産業まつりのアンケート結果は、信用できるの？

毎年 10 月に那覇市奥武山公園で開催される「産業まつり」には、大同火災も出展しているが、一般の商品やサービスと違って、「保険商品」を消費者へアッピールするのは難しい。ましてや琉球泡盛、アグー豚肉や沖縄そばなど、沖縄県の各種名産品が展示される中で、大同火災のブースに立ち寄っていただく方を呼び込むのは結構難儀なこと。

毎年、アンケートを実施しているが、3 日間の開催で、お陰様で約 1,000 人からご回答をいただいている。

問１．あなたは、「大同火災」が沖縄県に本社を置く損害保険会社であることをご存知でしたか？

回答結果は、以下のとおりです。

(2012年)

	人　数	構成比
はい	784	76%
いいえ	226	22%
無回答	25	2%
合計	1,035	100%

［解答］

「はい」と答えてくれた方が76%と多くなっていますが、これが、沖縄県全体の大同火災に対する知名度の高さを表していると考えるのは早計。

なぜなら、このアンケートに答えてくれた方は、どのような客層かと言えば、

たまたま、大同火災のブースに立ち寄っていただいた方からの回答

⇩

したがって、ブースに立ち寄らないで通り過ぎた方も含めたアンケートでは、当然、「はい」と答えてくれる方はもっと少ないはず。

このように、アンケートにおいては、どのような対象者に対して行ったものなのかがとても重要。

従って、サンプルは、必ずしも母集団の縮図とはならないことに注意する必要がある。

そうは言っても、全く信用できないかというと、そうではなく、相対的な傾向は把握できることが分かる。

年代別認知度（無回答を除く）

(2012 年)

年　代	は　い		いいえ		合　計
10 代	13	43%	17	57%	30
20 代	46	58%	33	42%	79
30 代	206	72%	82	28%	288
40 代	195	83%	41	17%	236
50 代	148	85%	27	15%	175
60 代	118	87%	17	13%	135
70 代以上	30	83%	6	17%	36
合計	756	77%	223	23%	979

さらに年代別に、大同火災の認知度を調べてみると、40 代以上では 80%以上の方が「はい」と答えているが、年代が若くなるに従い、「はい」と答えた方の割合は少なくなっている。この傾向は、沖縄県全体を対象としたアンケートを実施したとしても、おそらく同様の傾向が伺えるものと思います。そういう意味では、サンプルでも母集団の傾向を良く捉えていると言えるかもしれない。

以上、いくつかの数学的なものの考え方を披露させていただきましたが、皆さんも、データや情報をそのまま鵜呑みにせず、疑って掛かること、自分で確かめることも大切であることを分かっていただけたら幸いです。

以上