



INLAによる時空間の従属性を考慮した頻度モデル

2021年11月13日

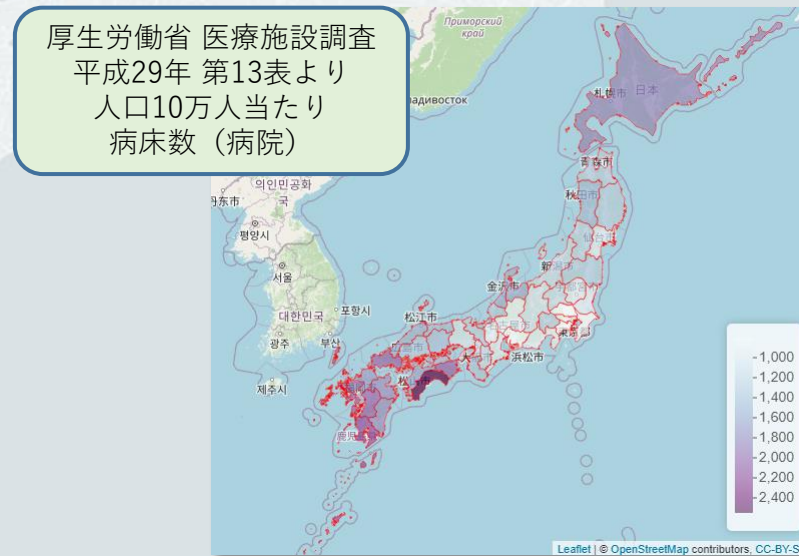
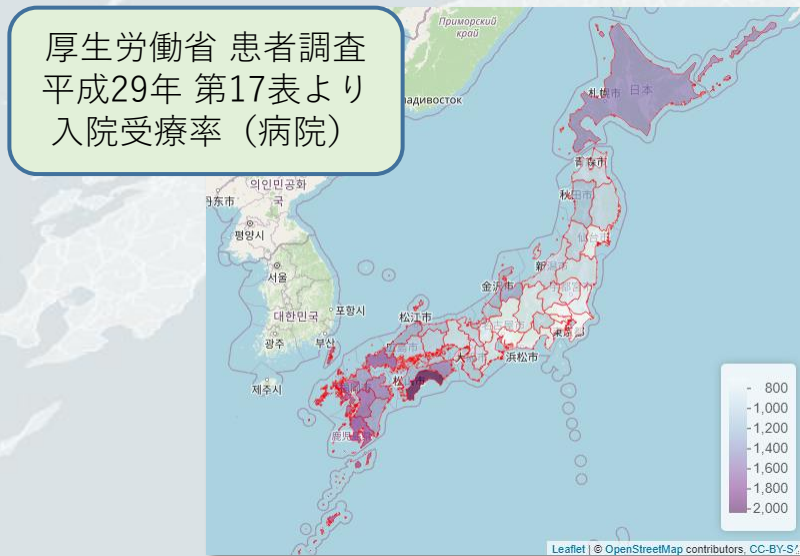
佐野 誠一郎（共栄火災海上保険）

目次

- 課題
- 使用するデータ
- 条件付き自己相関(Conditional Autoregressive: CAR)モデル
- 時空間モデル
- Integrated Nested Laplace Approximation (INLA)
- モデルの実装と評価
- まとめとさらなる課題

課題

- 例えば料率算定に使う、GLMによる頻度モデルを考える
 - 一般統計には地域を変数に持つものがよくある
 - 患者調査（厚生労働省）
 - 地域がん登録（国立がん研究センター）
 - 地域間に何らかの傾向が見られることもよくある



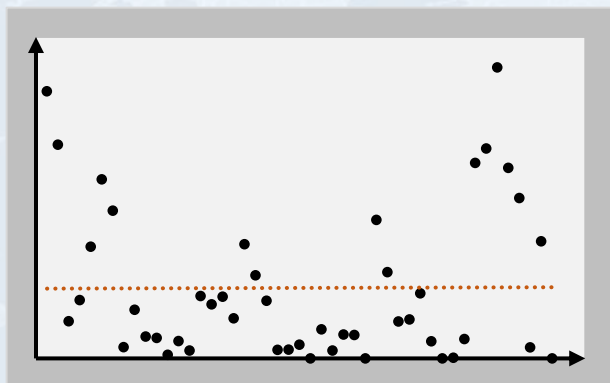
- しかし、地域を変数に用いることは単純ではない

課題

○ なぜか

使わない場合

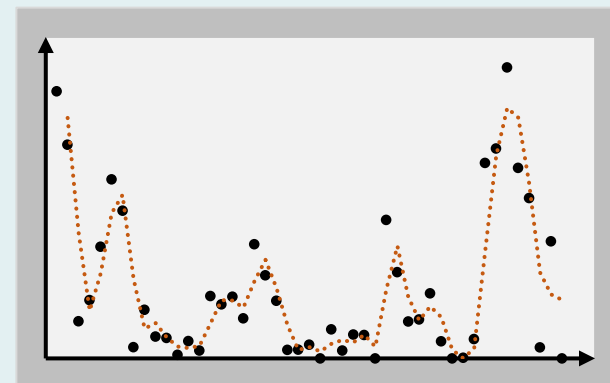
- 地域間の差異が明確な場合、説明力が不十分
- 精度が低い



どっちも
どっち

使う場合

- 各地域を独立に見るため、地域間の影響を反映しない
- 地域という構造を客観性を保持して表現するのが難しい



地域間の従属性を考慮したモデリングがしたい

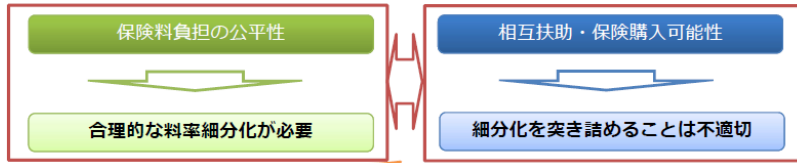
課題

○ 料率算定の場合、変数の追加とは更なる料率細分化

【参考】料率区分細分化に対する基本的な考え方

料率区分細分化に対する基本的な考え方

- 損害保険における料率区分については、以下のような背反的な観点があるなかで、料率三原則のほか社会受容性や保険購入可能性等のバランスも重視



《参考》保険種類共通的な料率区分細分化の判断の視点

以下の妥当性を判断するに際しては右記の視点を考慮

- 区分要素としての妥当性（区分として採用するか否かの視点）
- 区分方法としての妥当性（どの程度まで細分化するか視点）
- 区分間較差の妥当性（較差が妥当か否かの視点）

判断の視点
①統計的有意性
②区分の客観性
③情報入手コスト
④相関関係
⑤選択可能性
⑥リスクコントロール
⑦社会的受容性
⑧リスクの均質性
⑨較差の信頼性
⑩保険購入可能性

〔BASIC RATEMAKING (Fifth Edition, May 2016)〕 <CAS (Casualty Actuarial Society : 米国損保アクチュアリー会) >等を基に損害保険料率算出機構で作成

11

金融庁
火災保険水災料率に関する有識者懇談会
(第1回) 資料3より

地震保険料率に関する近年の対応

- 等区分は、社会全体でリスクを分担する社会的「連帯」の観点から、料率格差を平準化。
- 耐震割引は、「保険」としてのリスクコントロール機能向上の観点から、メリハリを効かせた。

「地震保険制度に関するプロジェクトチーム」(H24.11報告書公表)による議論とそれを受けた対応

等区分

- 東日本大震災をはじめ、保険料率の低い等で損害の大きい地震が頻発し、短期的に見ると、等区分は被害の実態と必ずしも合致せず。
- 震源モデルの精度にも限界があり、料率格差のみ精緻にしても合理性に欠ける。
- 当時、最大3倍以上あった料率格差が、震源モデル見直しによりさらに拡大する可能性があった。

社会的「連帯」の仕組みとしての役割も期待される地震保険において、極端な料率格差は適当でない。

(合理的な説明のつく範囲で平準化)

H26.7 等区分を4区分→3区分に統合

(~H26.6)	
1等地	1等地
2等地	2等地
3等地	3等地
4等地	

耐震割引

「保険」の観点

リスクの差異
↓ (反映)
保険料率の差

社会全体のリスク量低下 → リスクコントロール機能 (=耐震化のインセンティブ) 強化・向上を図るため (被害の関係を再評価)

H26.7 割引率を拡大 (最大30%→50%)

(~H26.6)

耐震割引	割引率	割引率
免震建築物割引	30%	50%
耐震等級割引	10~30%	10~50%
耐震診断割引	10%	10%
建築年割引	10%	10%

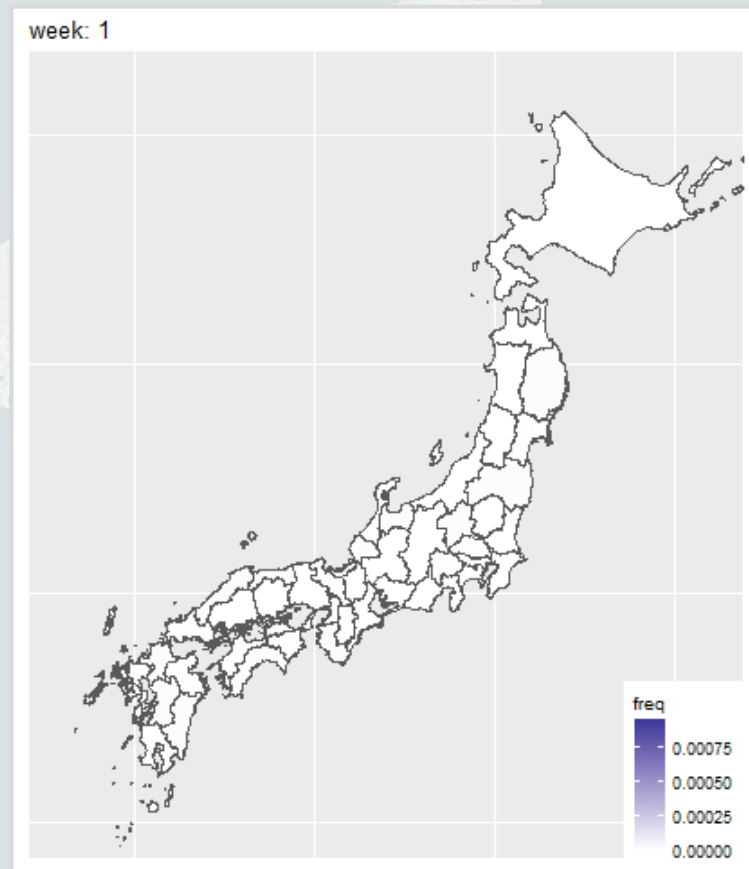
4

財務省
地震保険制度等研究会第3回
資料2より

課題

○ さらに、地域間の従属性だけでなく時系列のトレンドも反映したい

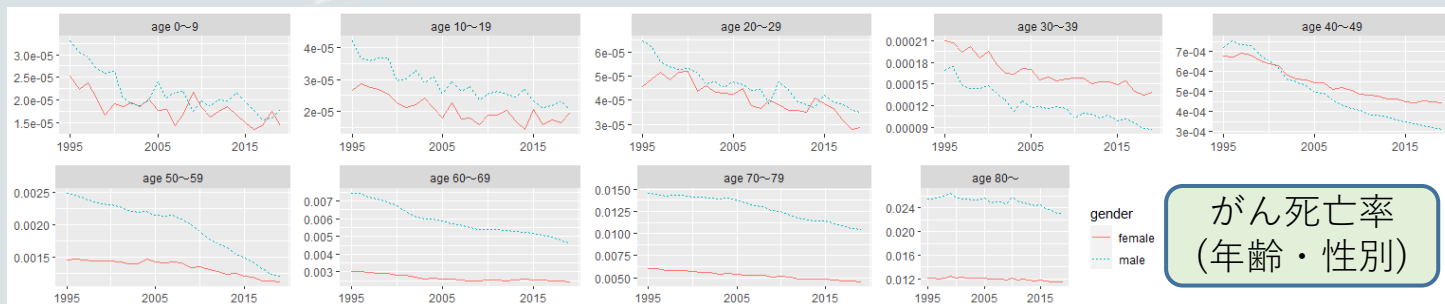
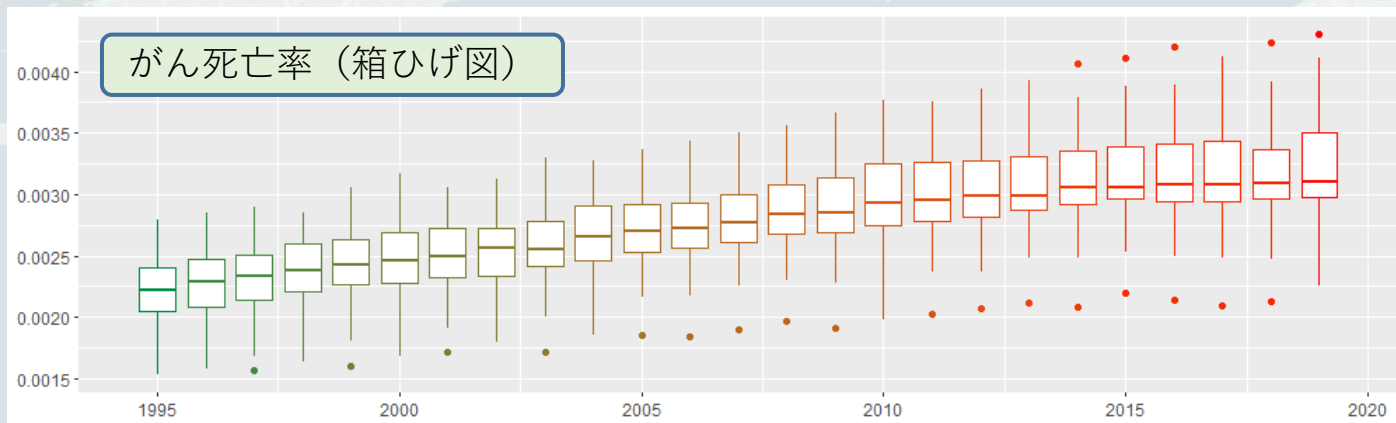
厚生労働省 感染症発生動向調査事業年報2019年度 第10-1表より
手足口病の発生率（週ごと）



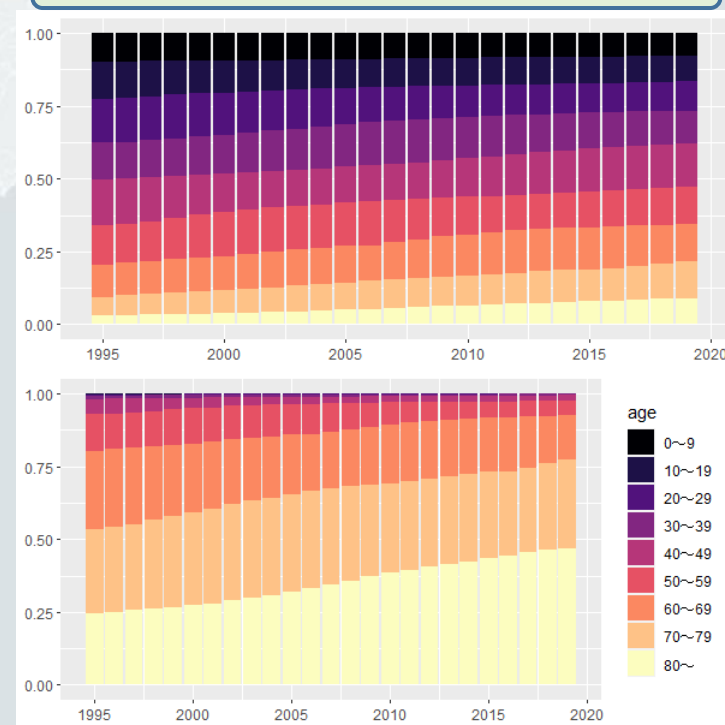
⇒ 時空間モデルで、地域間と時系列の従属性を考慮する

使用するデータ

- 都道府県別・性別・年齢区分別のがん死亡者数
 - ・・・地域がん登録（国立がん研究センター）
- 母数として人口推計（厚生労働省）

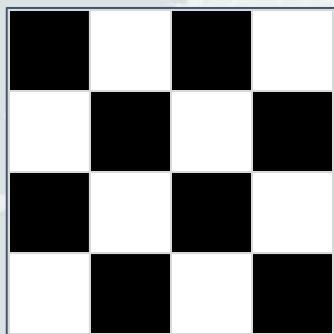


人口（上）と死亡者数（下）の占有率

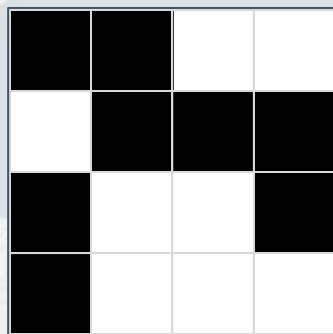


使用するデータ

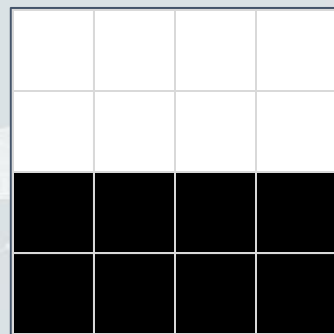
- モデリングの前に、地域間の従属性の有無を探索する
- 空間自己相関・・・近くにある地域間の観測値が持つ相関



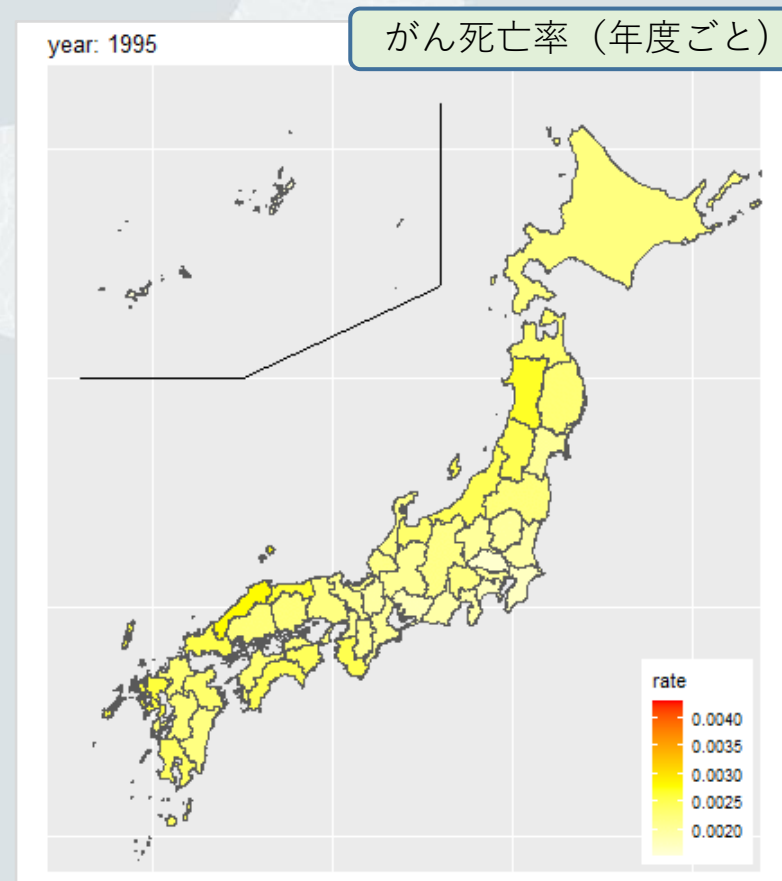
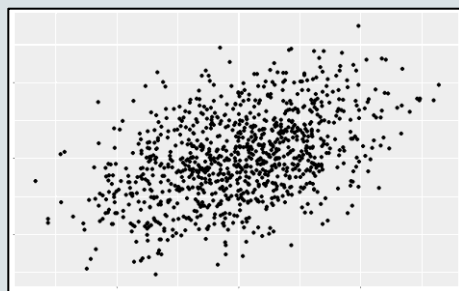
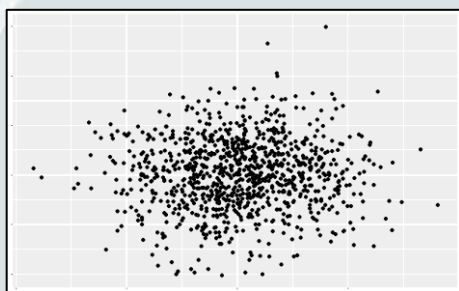
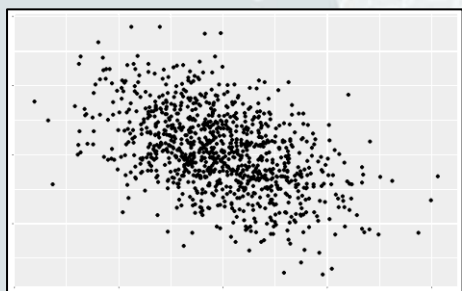
負の相関



相関なし

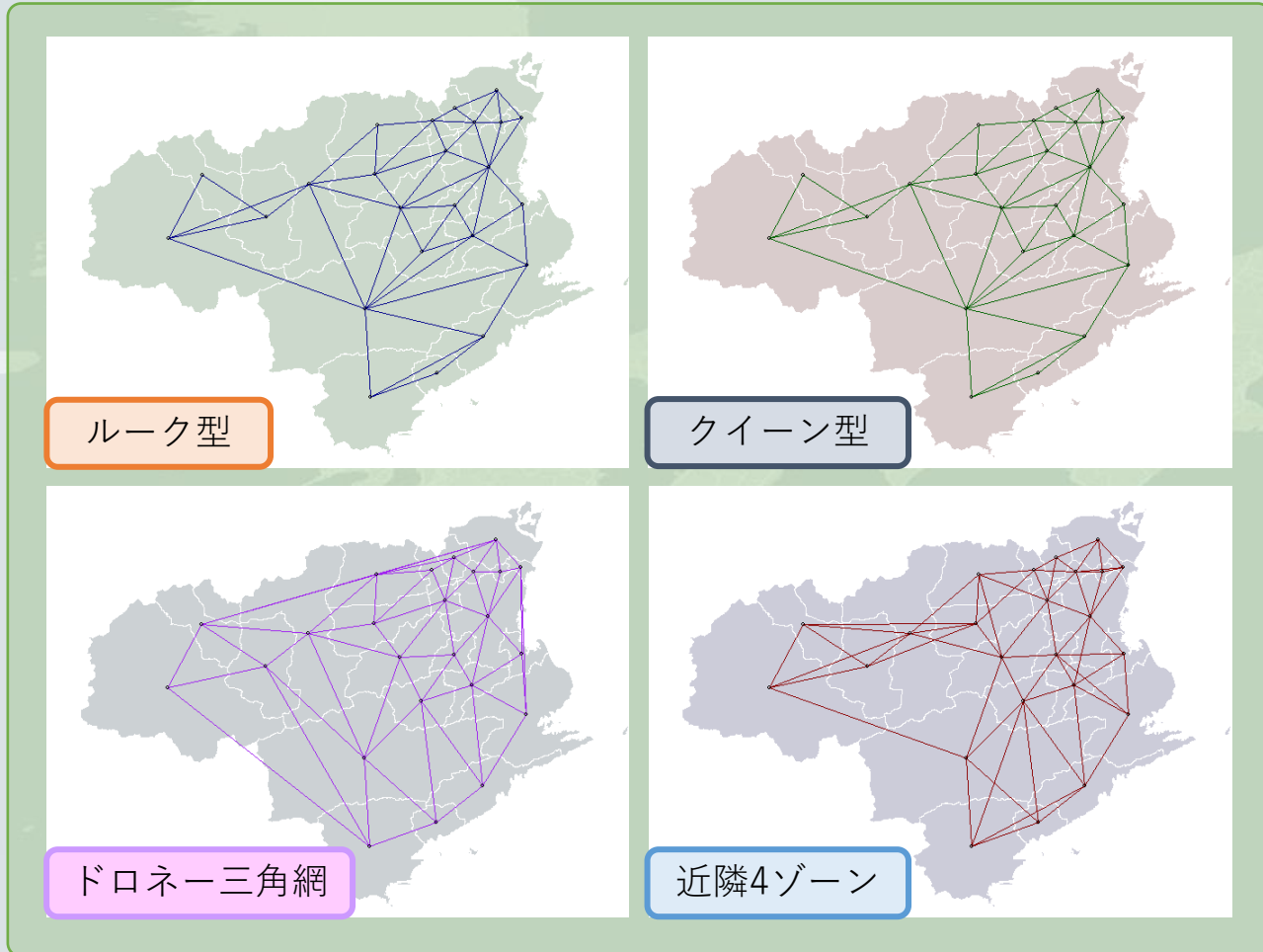


正の相関



使用するデータ

○ 隣接関係を定義する・・・Rパッケージ「spdep」より

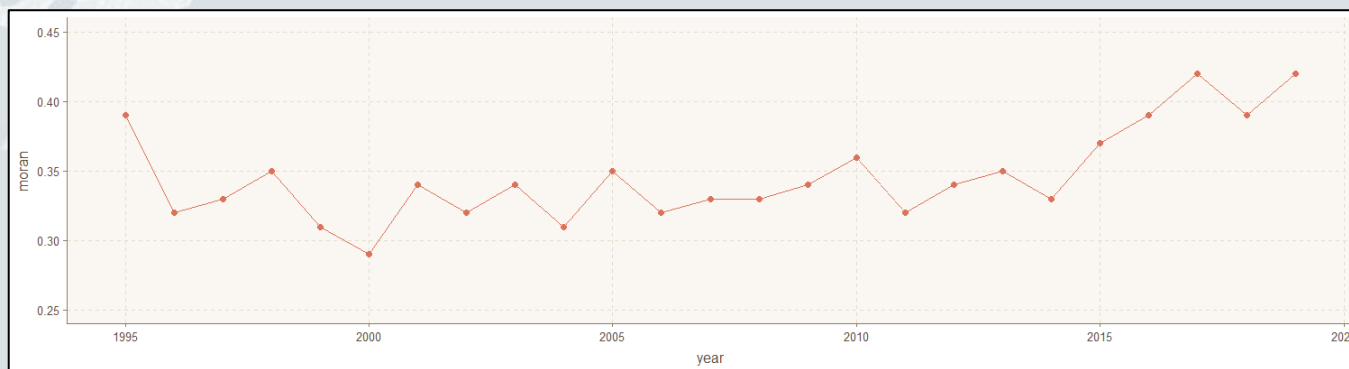


使用するデータ

○ モランI統計量 (MORAN 1950)

$$I = \frac{n}{\sum_i \sum_j w_{ij}} \frac{\sum_i \sum_j w_{ij} (y_i - \bar{y}) (y_j - \bar{y})}{\sum_i (y_i - \bar{y})^2}$$

- y_i : 地域*i* ($= (1, 2, \dots, n)$) の観測値
- \bar{y} : 観測値の平均
- w_{ij} : 地域*i*と地域*j*が隣接する場合は1、そうでない場合は0
- 概ね-1 (負の相関) ~ 1 (正の相関) の値を取る



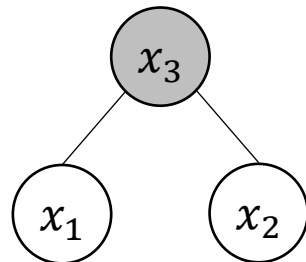
がん死亡率の
モランI統計量
(年度ごと)

条件付き自己相関 (CAR) モデル

- $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_K)^T$ を、地域ごとの確率変数からなるベクトルとする
- 地域 k ($k = 1, \dots, K$) の値 u_k に、次式の条件付き独立を仮定

$$p(u_k | \mathbf{u}_{-k}) = p(u_k | u_j, j \in \mathcal{N}(k))$$

- \mathbf{u}_{-k} : u_k 以外の \mathbf{u} の成分
 - $\mathcal{N}(k)$: 地域 k に近接する地域の集合
- このような \mathbf{u} を MRF (マルコフ確率場) という



$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}) &= p(x_1 | x_2, x_3) p(x_2 | x_3) p(x_3) \\ &= p(x_1 | x_3) p(x_2 | x_3) p(x_3) \end{aligned}$$

条件付き自己相関 (CAR) モデル

○ u_k が次式の条件付き分布に従うものをCARモデルという

$$u_k | \mathbf{u}_{-k} \sim N \left(\mu_k + \sum_{j \in \mathcal{N}(k)} c_{kj} (u_j - \mu_j), \sigma_k^2 \right)$$

- c_{kj} : 定数、 $c_{kk} = 0$. . . 地域間の従属関係を表す
- μ_k 、 σ_k^2 : 平均、条件付き分散

- 「 u_k は周辺地域の値 u_j と従属性 c_{kj} で決まる」という事前情報を与えている
- 正規分布に従うMRFをGMRF (ガウスマルコフ確率場) という

条件付き自己相関 (CAR) モデル

○ \mathbf{u} の同時密度関数が一意に存在する (Brook's lemma)

$$\mathbf{u} \sim N_K \left(\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_K \end{pmatrix}, (I_K - C)^{-1} M_\sigma \right)$$

- $C = \{c_{kj}\} : K \times K$ 行列
- $M_\sigma : (M_\sigma)_{kk} = \sigma_k^2$ の $K \times K$ 対角行列
- $c_{kj}\sigma_k^2 = c_{jk}\sigma_j^2$ を満たす

○ \mathbf{u} の分散構造 (の逆行列 (精度行列)) が決まっていて、かつ疎であることにより計算効率がいいモデル

○ この条件の中で色々なモデルが存在する・・・例えば

条件付き自己相関 (CAR) モデル

○ かんたんなCARモデルの例

・・・ Intrinsic CARモデル (ICAR) + 混合モデル

$$y_k = \mathbf{x}_k^T \boldsymbol{\beta} + u_k, k = 1, \dots, K$$

固定効果

変量効果

$$u_k | \mathbf{u}_{-k} \sim N \left(\frac{\sum_j w_{kj} u_j}{\mathcal{N}_k}, \frac{\sigma_u^2}{\mathcal{N}_k} \right)$$

- w_{kj} : 地域 k と地域 j が隣接する場合は1、そうでない場合は0
- \mathcal{N}_k : 地域 k と隣接する地域の数
- σ_u^2 : 分散パラメータ

⇒ 「各地域は隣接する地域の加重平均」と考える

Spatio-Temporal (時空間) モデル

- CARモデルと同様の考え方で、時系列のトレンドを反映する
 - 例えば自己相関 (AR) モデルはGMRFのひとつ
 - AR(1) ($x_t = \phi x_{t-1} + \varepsilon_t, \varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$) を条件付き分布で表すと

$$x_t | x_1, x_2, \dots, x_{t-1} \sim N(\phi x_{t-1}, \sigma^2)$$

- ただしモデルが複雑になるので、効率の良い計算方法が必要
 - CARモデルを含めた時空間モデルは、ベイズ推定でモデル化する
 - ベイズ推定で一般的な推定手法はMCMC
 - されどサンプリングを繰り返すMCMCは複雑なモデルには向かない

⇒ そこでINLAを使う

Integrated Nested Laplace Approximation (INLA)

○ 潜在ガウスモデルにラプラス近似を用いるベイズ推定の手法

○ 潜在ガウスモデル

- $y_i | \eta_i, \boldsymbol{\psi}$ ($\in \mathbf{y} = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$) : 確率変数、平均 μ_i
- $g(\mu_i) = \eta_i = \beta_0 + \sum_{m=1}^M \beta_m x_{mi} + \sum_{l=1}^L f_l(z_{li})$: 潜在パラメータ
 - $\boldsymbol{\beta} = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_M\}$: 固定効果のパラメータ
 - $\mathbf{f} = \{f_1, f_2, \dots, f_L\}$: 変量効果のパラメータ
 - $\boldsymbol{\psi} = \{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_K\}$: \mathbf{y} の分散や \mathbf{f} の分散を表すハイパーパラメータ

○ \mathbf{y} に条件付き独立を仮定する

$$p(\mathbf{y} | \boldsymbol{\theta} = \{\beta_0, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{f}\}, \boldsymbol{\psi}) = \prod_{i=1}^n p(y_i | \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\psi})$$

○ $\boldsymbol{\theta}$ に条件付き独立を仮定し、事前分布として正規分布を設定する
⇒ $\boldsymbol{\theta}$ はGMRF

Integrated Nested Laplace Approximation (INLA)

○ y_i に関するパラメータの周辺事後分布を求める

○ θ 、 ψ における各成分の周辺事後分布

$$p(\theta_i|\mathbf{y}) = \int p(\theta_i, \boldsymbol{\psi}|\mathbf{y})d\boldsymbol{\psi} = \int p(\theta_i|\boldsymbol{\psi}, \mathbf{y})p(\boldsymbol{\psi}|\mathbf{y})d\boldsymbol{\psi}$$

$$p(\psi_k|\mathbf{y}) = \int p(\boldsymbol{\psi}|\mathbf{y})d\boldsymbol{\psi}_{-k}$$

○ $p(\boldsymbol{\psi}|\mathbf{y})$ 、 $p(\theta_i|\boldsymbol{\psi}, \mathbf{y})$ を近似した $\tilde{p}(\boldsymbol{\psi}|\mathbf{y})$ 、 $\tilde{p}(\theta_i|\boldsymbol{\psi}, \mathbf{y})$ を求める

Integrated Nested Laplace Approximation (INLA)

○ $\tilde{p}(\boldsymbol{\psi}|\mathbf{y})$ の算出

$$\tilde{p}(\boldsymbol{\psi}|\mathbf{y}) \propto \frac{p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\psi})p(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\psi})p(\boldsymbol{\psi})}{\tilde{p}(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\psi}, \mathbf{y})} \Bigg|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}^*(\boldsymbol{\psi})}$$

- $p(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\psi}, \mathbf{y})$ をラプラス近似により正規分布 $\tilde{p}(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\psi}, \mathbf{y})$ に近似する
- 左式から $\boldsymbol{\theta}$ は任意なので、 $\tilde{p}(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\psi}, \mathbf{y})$ のモード $\boldsymbol{\theta}^*(\boldsymbol{\psi})$ で計算する

○ $\tilde{p}(\boldsymbol{\theta}_i|\boldsymbol{\psi}, \mathbf{y})$ の算出

$$\tilde{p}(\boldsymbol{\theta}_i|\boldsymbol{\psi}, \mathbf{y}) \propto \frac{p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\psi})p(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\psi})p(\boldsymbol{\psi})}{\tilde{p}(\boldsymbol{\theta}_{-i}|\boldsymbol{\theta}_i, \boldsymbol{\psi}, \mathbf{y})} \Bigg|_{\boldsymbol{\theta}_{-i}=\boldsymbol{\theta}_{-i}^*(\boldsymbol{\theta}_i, \boldsymbol{\psi})}$$

- $p(\boldsymbol{\theta}_{-i}|\boldsymbol{\theta}_i, \boldsymbol{\psi}, \mathbf{y})$ を正規分布 $\tilde{p}(\boldsymbol{\theta}_{-i}|\boldsymbol{\theta}_i, \boldsymbol{\psi}, \mathbf{y})$ に近似する
- $\tilde{p}(\boldsymbol{\theta}_{-i}|\boldsymbol{\theta}_i, \boldsymbol{\psi}, \mathbf{y})$ のモード $\boldsymbol{\theta}_{-i}^*(\boldsymbol{\theta}_i, \boldsymbol{\psi})$ で計算する

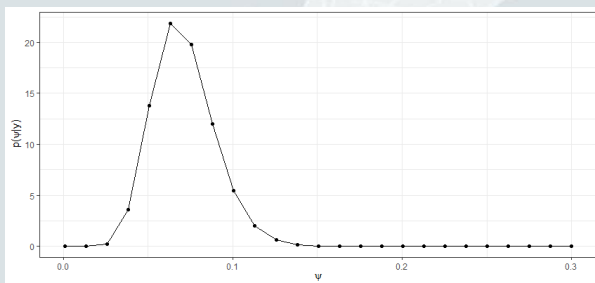
Integrated Nested Laplace Approximation (INLA)

○ $p(\theta_i | \mathbf{y})$ の算出

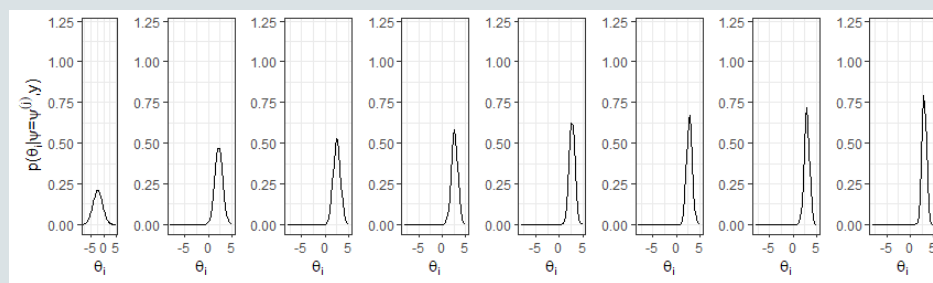
$$p(\theta_i | \mathbf{y}) \approx \int \tilde{p}(\theta_i | \boldsymbol{\psi}, \mathbf{y}) \tilde{p}(\boldsymbol{\psi} | \mathbf{y}) d\boldsymbol{\psi}$$

○ $\tilde{p}(\boldsymbol{\psi} | \mathbf{y})$ を表す点の集合 $\boldsymbol{\psi}^{(j)}$ を用いて積分式を下式で近似する

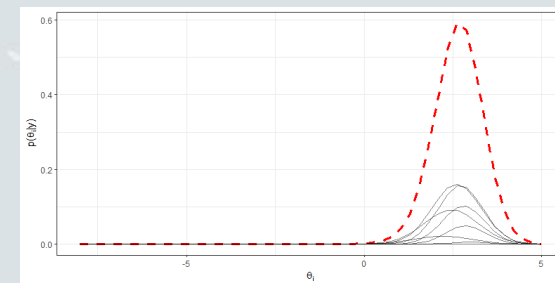
$$p(\theta_i | \mathbf{y}) \approx \sum_j \tilde{p}(\theta_i | \boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\psi}^{(j)}, \mathbf{y}) \tilde{p}(\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\psi}^{(j)} | \mathbf{y}) \Delta_j$$



$\tilde{p}(\boldsymbol{\psi} | \mathbf{y})$ を算出して
 $\boldsymbol{\psi}^{(j)}$ を取得



各 $\boldsymbol{\psi}^{(j)}$ に対して $\tilde{p}(\theta_i | \boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\psi}^{(j)}, \mathbf{y})$ を算出



$\tilde{p}(\theta_i | \boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\psi}^{(j)}, \mathbf{y}) \tilde{p}(\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\psi}^{(j)} | \mathbf{y})$ を
積み上げて $p(\theta_i | \mathbf{y})$ を算出

モデルの実装

○ GLMに時空間の変量効果を組み込んだモデル

$$y_i \sim \text{Poisson}(\lambda_i)$$

$$g(\lambda_i) = \log \lambda_i = \eta_i$$

$$\eta_i = \log E_i + \beta_0 + \beta_{gender} x_{1i} + \beta_{age} x_{2i} + u_{k(i)} + \gamma_{t(i)}$$

- y_i ($i = 1, 2, \dots, n$) : がんによる死亡者数
- E_i : 人口 (オフセット項)
- β_0 : 切片 (事前分布には $N(0,0)$ を設定)
- β_{gender} : 性別 (固定効果)
- β_{age} : 年齢区分 (固定効果)
- $\beta_{gender} \cdot \beta_{age}$ の事前分布には $N(0,0.001)$ を設定

モデルの実装

○ GLMに時空間の変量効果を組み込んだモデル

- $u_{k(i)}$: CARモデルによる変量効果
 - • • Lerouxモデル (Leroux, Lei, and Breslow 1999)

$$u_{k(i)} | \mathbf{u}_{-k(i)} \sim N \left(\frac{\rho \sum_j w_{k(i)j} u_j}{\rho \mathcal{N}_{k(i)} + 1 - \rho}, \frac{\tau_u^{-1}}{\rho \mathcal{N}_{k(i)} + 1 - \rho} \right)$$

- $\gamma_{t(i)}$: 時系列に関する変量効果 • • • 二次のランダムウォーク

$$\Delta^2 \gamma_{t(i)} = (\gamma_{t(i)} - \gamma_{t(i)+1}) - (\gamma_{t(i)+1} - \gamma_{t(i)+2}) \sim N(0, \tau_\gamma^{-1})$$
$$p(\boldsymbol{\gamma} (= (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_T)^T) | \tau_\gamma) \propto \tau_\gamma^{\frac{T-2}{2}} \exp \left(-\frac{\tau_\gamma}{2} \sum_{t=1}^{T-2} (\Delta^2 \gamma_t)^2 \right)$$

- ρ : ハイパーパラメータ ($\log \rho / (1 - \rho) \sim N(0, 0.45)$ を設定)
- τ_u : ハイパーパラメータ ($\log \tau_u \sim \text{LogGamma}(1, 0.0005)$ を設定)
- τ_γ : ハイパーパラメータ ($\log \tau_\gamma \sim \text{LogGamma}(1, 0.0005)$ を設定)

モデルの実装

○ 比較するモデル（計算はRパッケージ「R-INLA」を用いる）

- GLM (1) : 固定効果のみ

$$\eta_i = \log E_i + \beta_0 + \beta_{gender}x_{1i} + \beta_{age}x_{2i}$$

- GLM (2) : GLM (1) に地域を固定効果として変数に入れる

$$\eta_i = \log E_i + \beta_0 + \beta_{gender}x_{1i} + \beta_{age}x_{2i} + \beta_{region}x_{3i}$$

- 空間モデル : 変量効果をCARのみとする

$$\eta_i = \log E_i + \beta_0 + \beta_{gender}x_{1i} + \beta_{age}x_{2i} + u_{k(i)}$$

○ 下記の統計量を用いてモデルを確認する

- 逸脱度情報量 (DIC) 、WAIC : 当てはまりの良さ
- CPO、加重平方平均二乗誤差 (WRMSE) : 予測精度

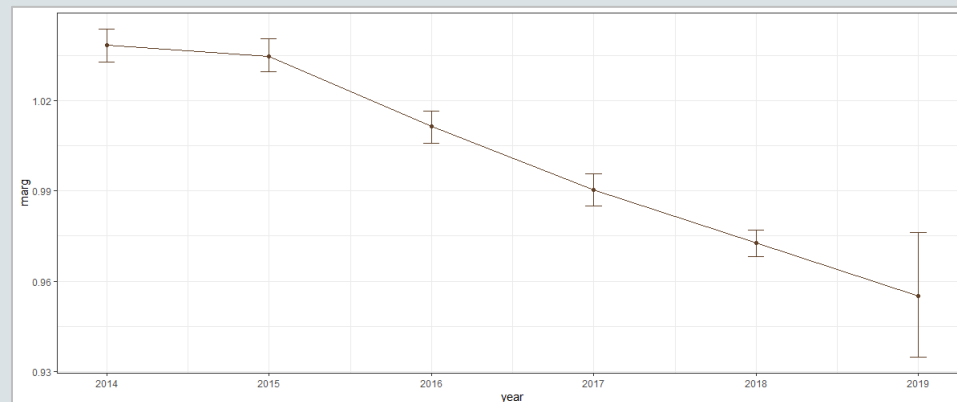
○ 2014～2018年度のデータを使用、2019年度のデータで評価

モデルの評価（結果）

- パラメータ推定値（抜粋）

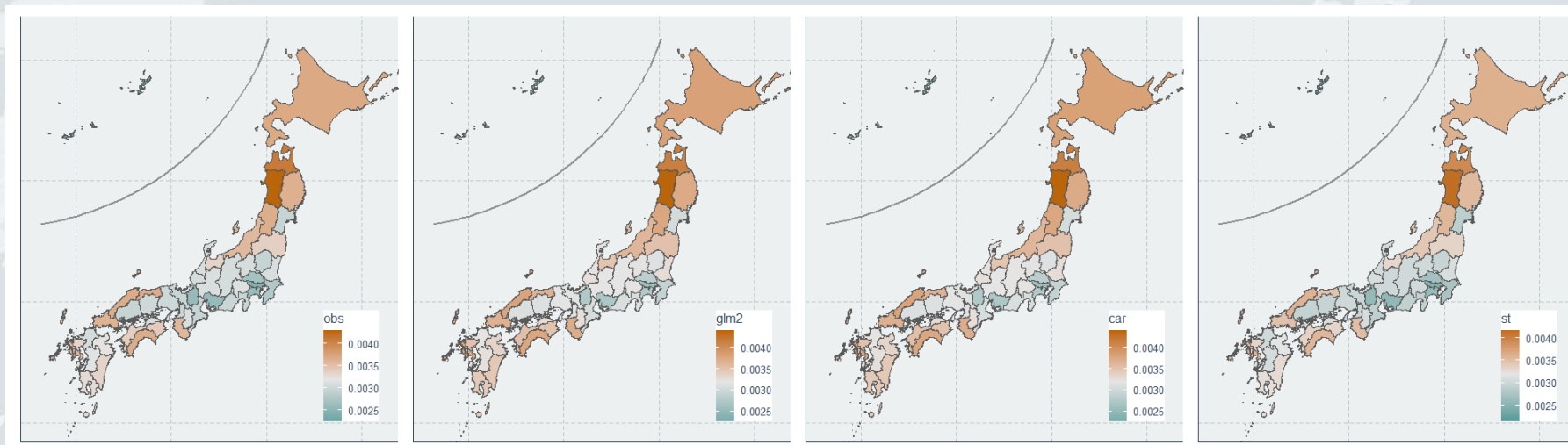
	GLM (1)		GLM (2)		空間モデル		時空間モデル	
	Mean	Sd	Mean	Sd	Mean	Sd	Mean	Sd
Intercept	-10.7207	0.0491	-10.6085	0.0492	-10.7249	0.0527	-10.7350	0.0521
Age 40~44	2.8411	0.0498	2.8404	0.0498	2.8404	0.0498	2.8403	0.0498
Age 45~49	3.4314	0.0495	3.4306	0.0495	3.4306	0.0495	3.4323	0.0495
Age 50~54	4.0423	0.0494	4.0410	0.0494	4.0410	0.0494	4.0421	0.0494
Age 55~59	4.6177	0.0493	4.6158	0.0493	4.6158	0.0493	4.6164	0.0493
Female	-0.6994	0.0015	-0.7006	0.0015	-0.7006	0.0015	-0.7009	0.0015

- 時空間モデルの時系列に関する変量効果



モデルの評価（結果）

- 都道府県間ごとの予測値（2019年度のデータに対して）

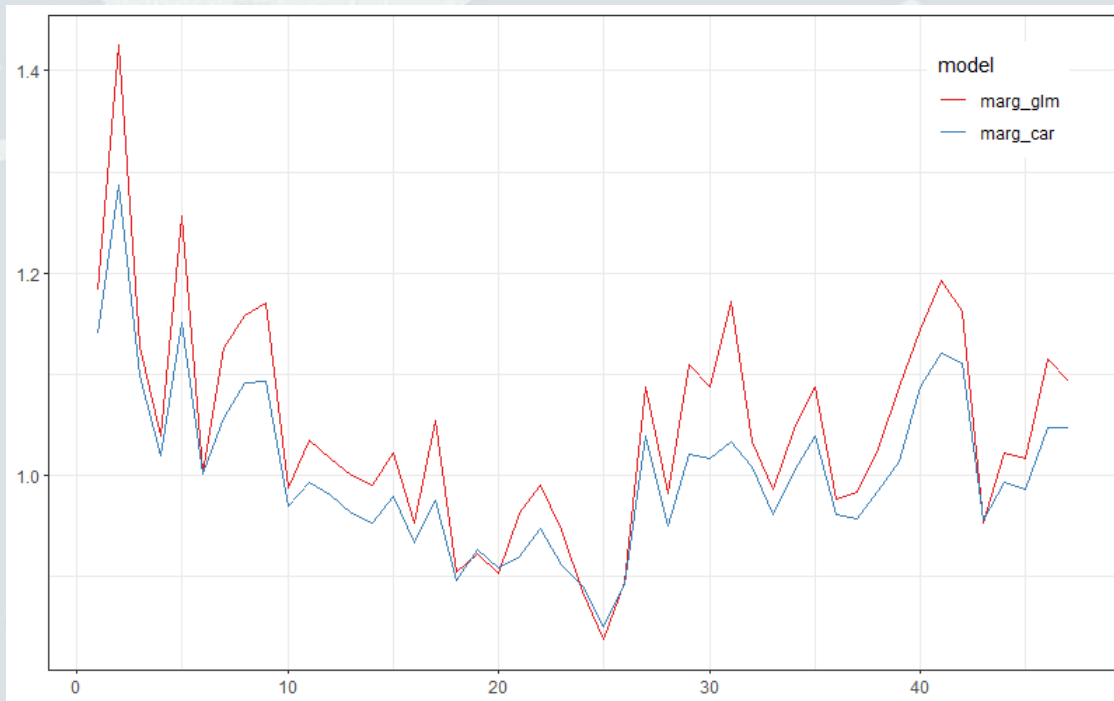


- 統計量によるモデル比較（小さいほど当てはまりまたは精度がよい）

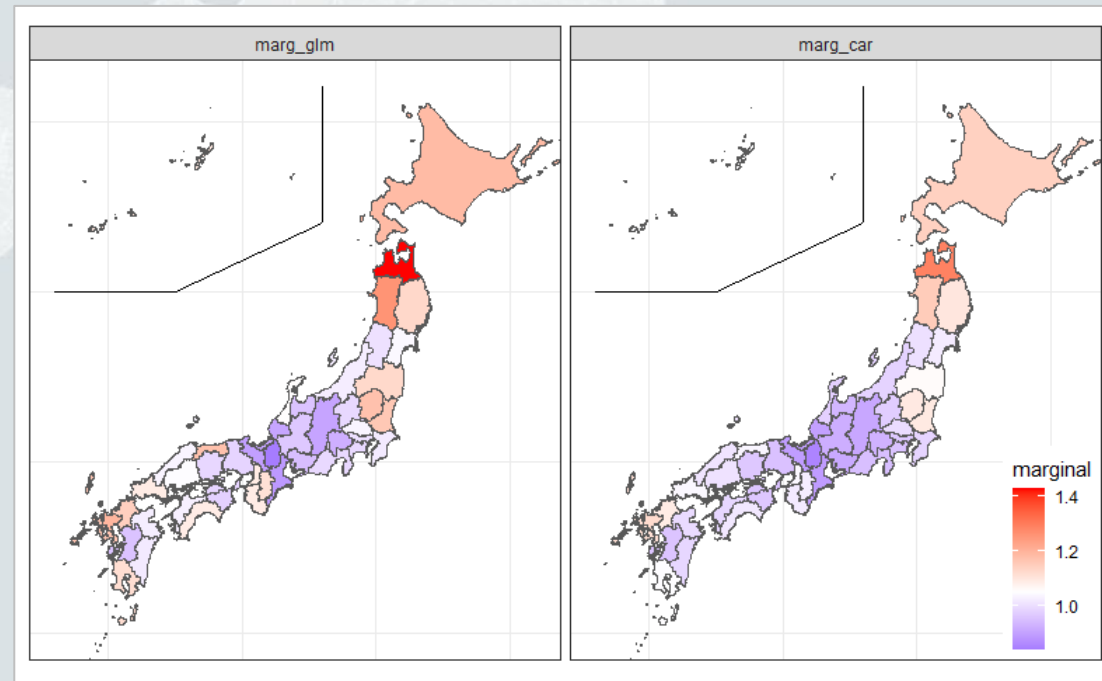
	DIC	WAIC	CPO	WRMSE
GLM (1)	76,635	76,877	38,438	96.22
GLM (2)	72,278	72,616	36,309	86.25
空間モデル	72,277	72,613	36,307	86.13
時空間モデル	71,122	71,442	35,722	65.89

モデルの評価 (CARによる地域間の平滑化)

- CARモデルによる地域間格差の平滑化を確認する
- 「 $u_{k(i)}$ の予測値」(CAR)と「 β_{region} の推定値」(GLM)を見ることで、性別・年齢区分別のポートフォリオを除いた地域間の格差を比較する
- より明確な比較のため、年齢区分50~54歳のみのデータを用いる



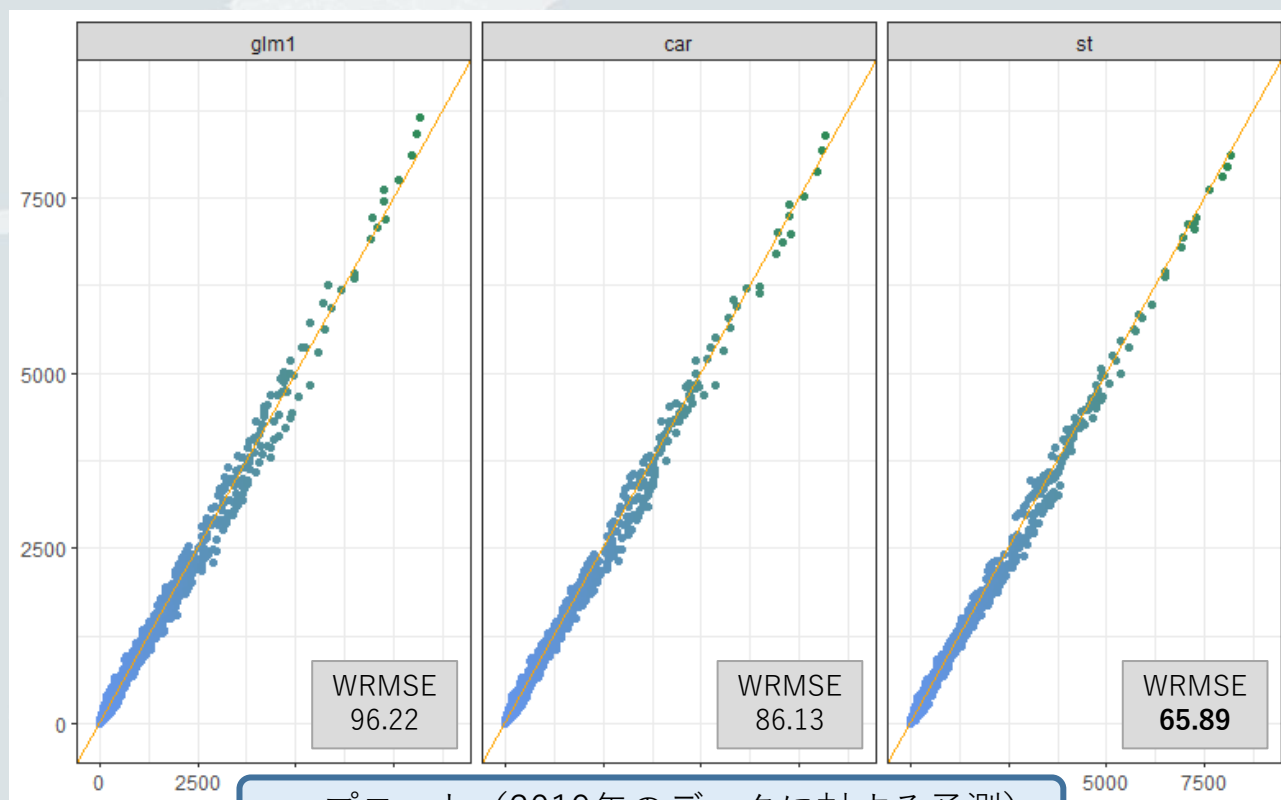
都道府県ごとに横に並べた場合



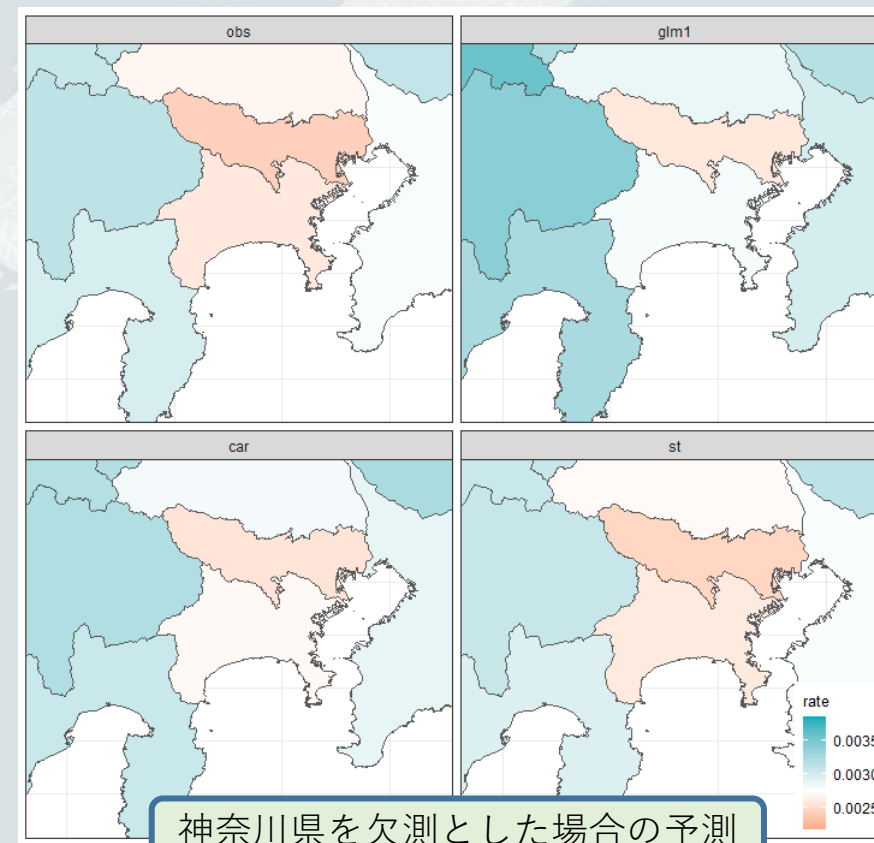
地図プロットで見た場合

モデルの評価（未知の地域の予測）

- CARモデルは、観測されていない地域に対して、その地域の予測値を周辺地域の情報で補間することができる
- 各都道府県の y_i を欠測とし、その地域に対する予測を評価する



q-qプロット（2019年のデータに対する予測）



神奈川県を欠測とした場合の予測

まとめ

- 通常のGLMでは難しい、地域間および時系列の従属性という多面的な構造を反映したモデルとして時空間モデルを提案した
- また、複雑なベイズ推定に柔軟かつ効率的に対応する手法として、INLAを提案した
- 今回のケースでは、時空間モデルは、地域と時系列の相関を持つデータに対して通常のGLMよりも高い予測精度を示した
- アクチュアリー業務は納得感のある前提の説明が求められるケースが多いため、時空間モデルは、一定の条件に対して主体性はあるが無理のない事前情報を持つ特性から、使い勝手のよい手法であると考えられる

さらなる課題

- 今回は、GLMに変量効果を加えるというアプローチで時空間モデルを提案するため、固定効果が既に一定の強さを持っているデータを使用した
- したがって時空間モデルの変量効果に使うモデルの比較は、結果が大きく変わらなかったので行っていない
- 一般的には、時空間モデルは地域および時系列で集約されたデータを対象としている
- この場合、提案モデルを更に発展させて、地域と時系列の交互作用を組み込むことで、時間の経過とともに地域間の従属性が変化するモデルを適用することなどが考えられる

参考文献

- Banerjee, Sudipto, Bradley P Carlin, and Alan E Gelfand. (2014). Hierarchical Modeling and Analysis for Spatial Data. CRC press.
- Besag, Julian, Jeremy York, and Annie Mollié. (1991). “Bayesian Image Restoration, with Two Applications in Spatial Statistics.” *Annals of the Institute of Statistical Mathematics* 43 (1): 1–20.
- Bivand R, Wong DWS (2018). “Comparing implementations of global and local indicators of spatial association.” *TEST*, **27**(3), 716–748.
- Blangiardo, Marta & Cameletti, Michela & Baio, Gianluca & Rue, Håvard. (2013). Spatial and spatio-temporal models with R-INLA. Spatial and spatio-temporal epidemiology. 4C.
- BRECHMANN, E., and C. CZADO. (2014). Spatial Modeling. Edited by Edward W Frees, Richard A Derrig, and Glenn Meyers. Vol. 1. Predictive Modeling Techniques. Cambridge University Press.
- C. Brunsdon, L. Comber, 湯谷啓明(訳), 工藤和奏(訳), 市川太祐 (訳) (2018) Rによる地理空間データ解析入門. 共立出版.
- Leroux, B.G., Lei, X. and Breslow, N. (1999) Estimation of Disease Rates in Small Areas: A New Mixed Model for Spatial Dependence. In: Statistical Models in Epidemiology, the Environment and Clinical Trials, Springer-Verlag, New York
- Luke, Tierney, and B. Kadane Joseph. (1986). “Accurate Approximations for Posterior Moments and Marginal Densities.” *Journal of the American Statistical Association* 81 (393): 82–86.
- MORAN, P. A. P. (1950). “NOTES ON CONTINUOUS STOCHASTIC PHENOMENA.” *Biometrika* 37 (1-2): 17–23.
- Rue, Håvard, and Leonhard Held. (2005). Gaussian Markov Random Fields: Theory and Applications. CRC press.
- Rue, Håvard, Sara Martino, and Nicolas Chopin. (2009). “Approximate Bayesian Inference for Latent Gaussian Models by Using Integrated Nested Laplace Approximations.” *Journal of the Royal Statistical Society: Series b (Statistical Methodology)* 71 (2): 319–92.
- Ver Hoef, Jay, Erin Peterson, Mevin Hooten, Ephraim Hanks, and Marie-Josée Fortin. 2017. “Spatial Autoregressive Models for Statistical Inference from Ecological Data.” *Ecological Monographs* 88 (November).