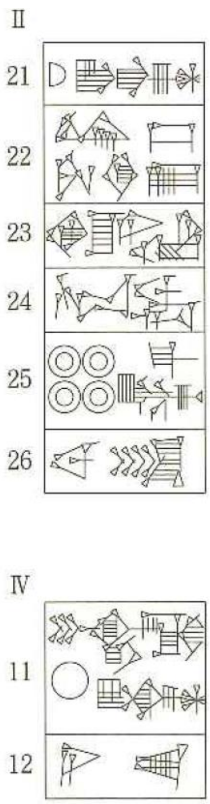
保険数学の歴史

《発表のまとめ》

(1)　シュメール人の複利計算
(2)　シモン・ステヴィンの知られざる業績—現価の発見
(3)　収支相当の原則の原風景
(4)　ラプラスによる「男性が女性よりも若干生まれ易い」ことの確率論を巧妙に使った論証
※　科学的表記または指数表記（$m\times10^{\pm n}$)の忘れられた創案者エルンスト・エッセルバッハ
(5)　古典的責任準備金の定義と第２基本等式についての異論
(6)　保険数学の量記号のルーツは，今は使われなくなったニュートンの冪記号
(7)　メーカムによるメーカム定数の分析
(8)　ゴンパーツのライバル
(9)　生命保険数学から生まれた e の定義式
(10)　様々な研究者によるレキシスの図示法について
(11)　ウェアリングのアクチュアリー定理について
(12)　ド・モアヴルよりも 45 年早く発表された同じタイプの死亡法則について

《資料 No1》

エンメテナの回顧碑文



Ⅱ.21-23.　$1\mathrm{gur}_7$（の大麦）をウンマの男は（ラガシュから）利子付きで借りた.

24.（ウンマ側が大麦を返さないので）裁定が下された.

25-26.（元利合計）40.0.0.0(sìla,その量の程度は)gur_7 である.

Ⅳ.11-12.　ラガシュの大麦 10 gur_7 を彼は返済した.

（『シュメール人の数学』室井和男　訳）

（コメント）
$1\mathrm{gur}_7$＝5,20,0,0 sìla
$(=5\times60^3+20\times60^2=1152000$ リットル)

40.0.0.0 sìla＝8640000 リットル
8640000＝1152000×7.5
$7.5 \fallingdotseq (1+\frac{1}{3})^7$
$10 \fallingdotseq (1+\frac{1}{3})^8$

（翻訳部分の碑文の背景）

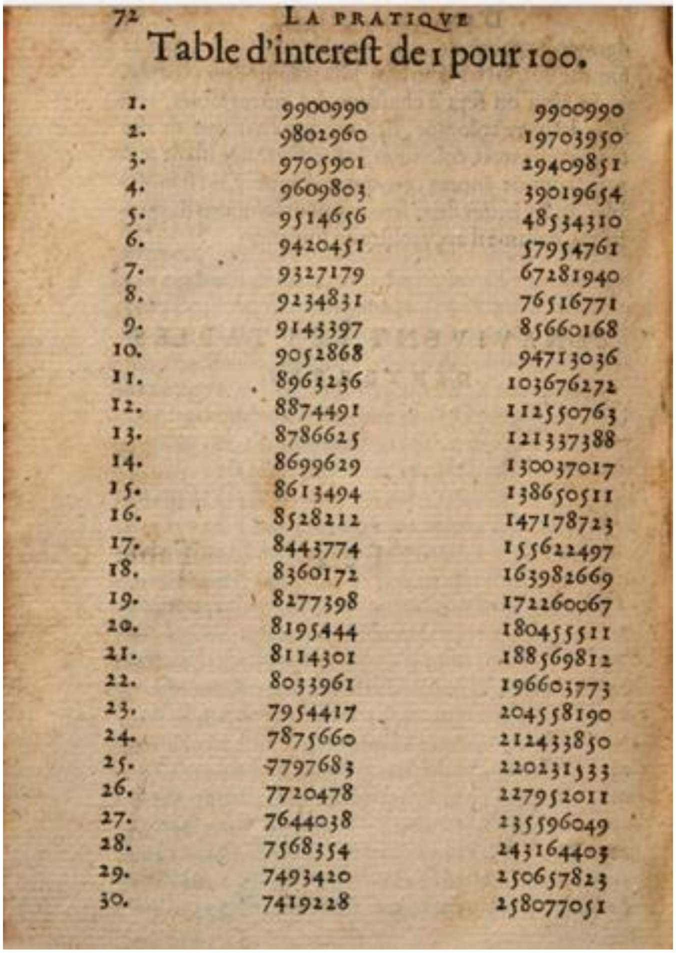
ラガシュの王エンメテナ（紀元前 2400 年頃）は隣接の有力都市ウンマに 1152000 リットルという大量の大麦を貸した.ラガシュは７年目に利息を付けて大麦を返してくれると思ったら，返済せずにウンマの王ウルルンマは，ラガシュに攻め込んできた.しかし，エンメテナなに撃退され，自分の親衛隊も見殺しにしてウンマに逃げ帰り，そこで殺された.ウルルンマの後を継いだイルは，この戦いの１年後に，つまり借りてから８年後に，借りた大麦に利息を付けて返した.

《資料 No2》

シモン・ステヴィン（1548 - 1620）

「万能の人」とも呼ばれることもあるステヴィンの業績は，非常に幅広い．しかも，単に博識なのではなく，その智の使い方が極めて現代的であることに驚かされる．上記例では，情報公開の有用性に対する彼の深い洞察を示しているし，『十進法(1585)』は，当時の複雑極まりない度量衡を，十進法を基準にして再構築することを目指したもので，メートル法を先取りしている．しかも，ラテン語が読めない職人や技師のためにオランダ語やフランス語で書いているのはデカルトに先んじている．天体観測に関しては，複数の観測者によるデータの持ち寄りを提言している．複数の会社がデータを持ち寄って，より有用な生命表を作成する現在の標準生命表作成にも繋がる発想を既に有していた．同時代のティコ・ブラーエと比較するとその先進性が際立つ．

《資料 No3》



72 LA PRATIQVE

Table d'intereſt de 1 pour 100.

1.	9900990	9900990
2.	9802960	19703950
3.	9705901	29409851
4.	9609803	39019654
5.	9514656	48534310
6.	9420451	57954761
7.	9327179	67281940
8.	9234831	76516771
9.	9143397	85660168
10.	9052868	94713036
11.	8963236	103676272
12.	8874491	112550763
13.	8786625	121337388
14.	8699629	130037017
15.	8613494	138650511
16.	8528212	147178723
17.	8443774	155622497
18.	8360172	163982669
19.	8277398	172260067
20.	8195444	180455511
21.	8114301	188569812
22.	8033961	196603773
23.	7954417	204558190
24.	7875660	212433850
25.	7797683	220231533
26.	7720478	227952011
27.	7644038	235596049
28.	7568354	243164403
29.	7493420	250657823
30.	7419228	258077051

『実用算術(1585)』

La Practique d'Arithmetique

ステヴィンは本書のなかで，元金，利子，単利，複利は明確に定義し，1%から 16%の複利表を収載している．ここで留意すべきは，この当時，利息の算定は極秘事項とされていたことである．それ故，ステヴィン自身も本書のなかで「多額の費用なしにはそれを得ることは出来ず，原則的にその作成法はごく少数の人々のみに明かさるるものとされり」とわざわざ言及しており，その秘密主義の理由が「それらを秘密にしておくことはややもすると学芸への愛よりむしろ利益への愛により説明さるるように思われん」と分析した上で，本書の出版の必要性を感じていたものと思われる．

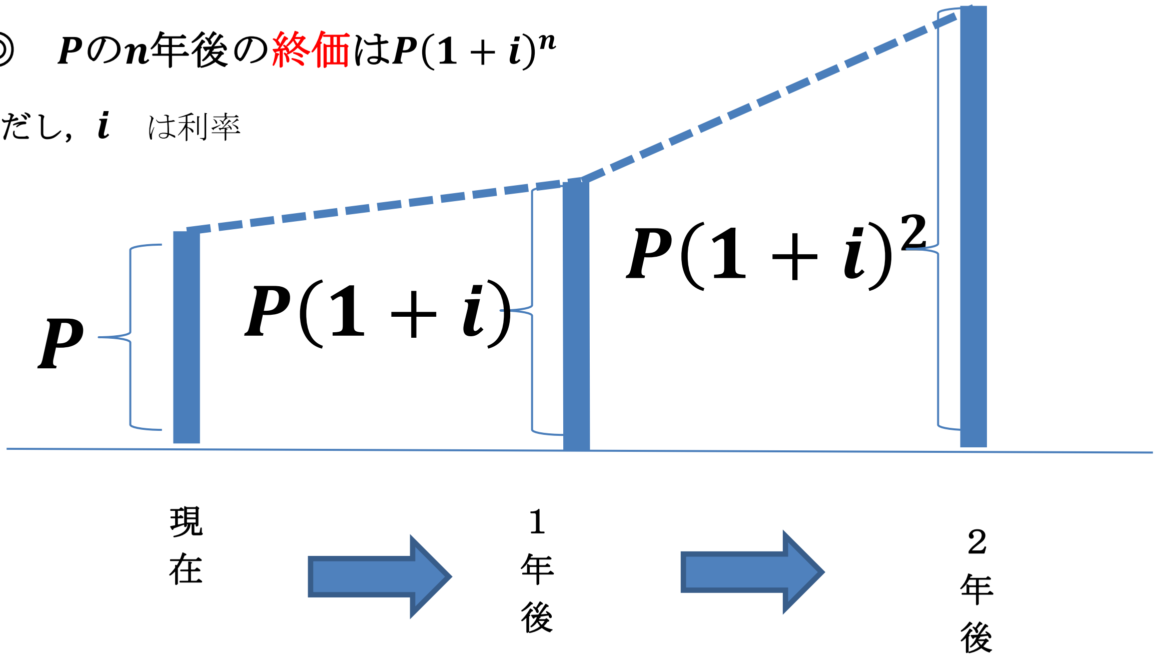
　左表は１％の場合の**現価表**（$1/1.01^n$　n=1～30）である．

《資料 No3》続き

【終価と現価の略説】

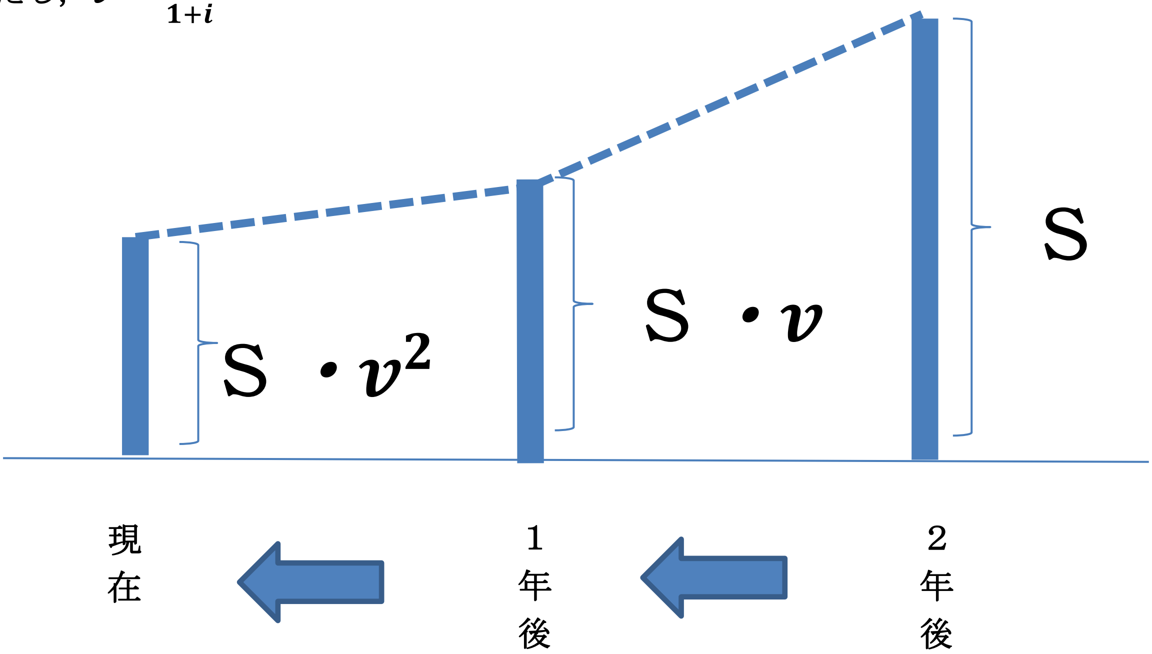
◎　Pのn年後の終価は$P(1+i)^n$

ただし，i　は利率



◎　n年後Sの現価はＳ・v^n

ただし，$v=\frac{1}{1+i}$



P.V.(Present Value 現価)とは将来の CF(Cash Flow)を
現在に引き戻す方法

《資料 No4》

問 70.

2 年後の終わりに支払わなければならない借金が 900 ポンドある人物がいる：彼は債権者に 5 年でそれを支払うことの同意を得た．すなわち，毎年の年金のように支払う．それぞれのこれら 5 回の支払いはいくらであるべきか．ただし，1 年に 10 パーセント複利であるとする．

リチャード・ウィット：『算術質疑（1613）』拙試訳

（略説）

答えは$£196.4s.3d$とある．これは 196 ポンド，4 シリングと 3 ペンスを意味し，1 ポンド=20 シリング,1 シリング=12 ペンスの換算レートを使って，10 進法基準に変換すると $£196.4s.3d = £196.213$ であり，現代の記号を使って表現するならば下記のような収支相当の原則に基づいた等式から求められていることが分る．

収入（この場合は借入金）　$£900$　⇒収入の現価：$£900 \times v^2$　但し，現価率$v = 1/1.1$

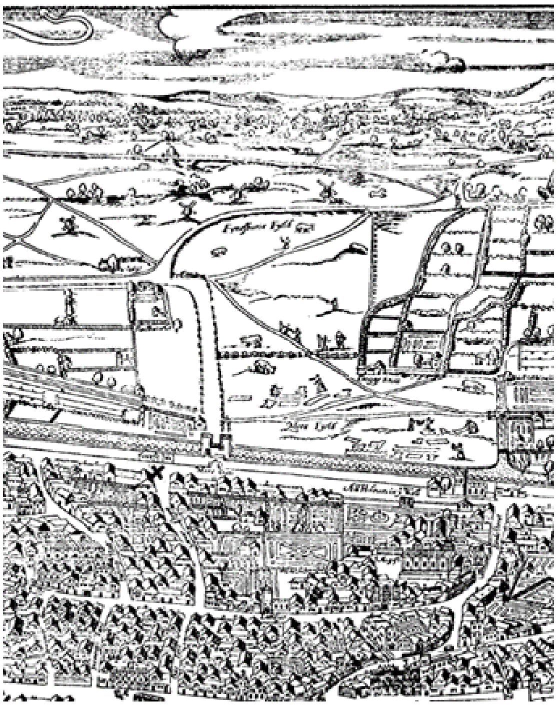
支出（この場合は毎年末の返済額）$£P$ ⇒支出の現価：$£P \times a_{5|}$

よって，収支相当の原則より　$£900 \times v^2 = £P \times a_{5|}$

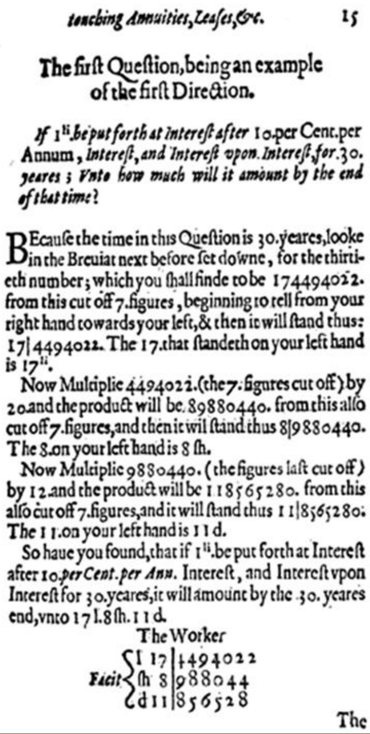
$$£P = £\frac{900 \times v^2}{a_{5|}} = £\frac{743.8017}{3.790787} = £196.213$$

なお，ここで使用されている10%は，この当時の法定最高利率である．通常の利率である6.25%に基づいている問題もある．

《資料 No5》



リチャード・ウィットが住んでいたセント・メリー・ウールチャーチ の教区



touching Annuities, Leases, &c. 15

The first Question, being an example of the first Direction.

If 1li. be put forth at Interest after 10. per Cent. per Annum, *Interest, and Interest upon Interest, for* 30. *yeares; Vnto how much will it amount by the end of that time?*

BEcause the time in this Question is 30. yeares, looke in the Breuiat next before set downe, for the thirtieth number; which you shall finde to be 174494022. from this cut off 7. figures, beginning to tell from your right hand towards your left, & then it will stand thus: 17|4494022. The 17. that standeth on your left hand is 17li.

Now Multiplie 4494022. (the 7. figures cut off) by 20. and the product will be 89880440. from this also cut off 7. figures, and then it wil stand thus 8|9880440. The 8. on your left hand is 8 sh.

Now Multiplie 9880440. (the figures last cut off) by 12. and the product will be 118565280. from this also cut off 7. figures, and it will stand thus 11|8565280. The 11. on your left hand is 11 d.

So haue you found, that if 1li. be put forth at Interest after 10. *per Cent. per Ann.* Interest, and Interest vpon Interest for 30. yeares, it will amount by the 30. yeares end, vnto 17 l. 8 sh. 11 d.

The Worker

Facit	l 17	4494022
	sh 8	988044
	d 11	856528

The

Richard Witt: Arithmeticall Questions (1613)
リチャード・ウィット：『算術質疑（1613）』

《資料 No6》

En repassant des logarithmes aux nombres, on aura, pour la probabilité que x est égal ou moindre que $\frac{1}{2}$, une fraction dont le numérateur est peu différent de l'unité et égal à 1,1521, et dont le dénominateur est la septième puissance d'un million; cette fraction est même un peu trop grande, et, comme elle est d'une petitesse excessive, on peut regarder comme aussi certain qu'aucune autre vérité morale, que la différence observée à Paris entre les naissances des garçons et celles des filles est due à une plus grande possibilité dans la naissance des

x が $\frac{1}{2}$ 以下になる確率に対し, その分数の分子は1とはあまり変わらず, 1.1521に等しく, 分母は百万の7乗である.　　ラプラス :『確率についての覚書（1810)』(下線部　拙試訳)

《資料 No7》

Appendix F.—*Extracts from a Letter addressed to* Professor Williamson *by* Dr. Esselbach.

The two objections against the practical applications of Weber's absolute unit have been sufficiently pointed out as being—

1. Its minuteness; and
2. That the electromotive force of galvanic elements does not allow of variation (as strength of current, tension, and resistance do), but that we have to accept certain constants as nature has fixed them.

I take it for granted that the standard of absolute unit would not lose in authority if a plain multiple of it were adopted. I need not point out that the French metre itself is only a submultiple, $\frac{1}{10,000,000}$th of a natural unit—the earth's quadrant. The multiple of the natural electro-magnetic unit I am about to suggest for practical use is 10^{10}, therefore very simple (which is of no little importance); and it is a multiple which leads us to those standards which are practically used.

ウェーバーの絶対単位の実用化に対する二つの異議が，以下の通り十分に指摘されて来た.

1. その細かさ；そして
2. ガルバーニ電池の起電力に変動の余地がなくて（電流，電圧，及び抵抗の強さがそうであるように)，自然界においてそれらが固定されるように，いくつかの定数を受け入れなければならないこと.

絶対単位に平易な掛け算が採用された場合は，絶対単位の基準は信頼性で引けを取らないであろうことを，私は当然のこととして考えている．フランス式の 1 メートル自体が，唯一の地球の四分円の長さである自然単位の$\frac{1}{10,000,000}$の約数であることを指摘する必要はない．私が実用的な使用のために提案する電磁気の自然単位の倍数は10^{10}である．したがって，非常に単純である（それは殆どなんの重要性もない)；それが実際に使用されるこれらの基準に我々を導く倍数（掛ける数）である.

・・・・・・・・

1862 年 9 月 18 日，ロンドンにて

『附録 F.　ｴｯｾﾙﾊﾞｯﾊ博士からｳｨﾘｱﾑｿﾝ教授への手紙の抜粋』(拙試訳)

《資料 No8》

保険契約の継続中の会社への請求権を放棄した人は，払い込んだ保険料の一部への請求権をもつという考え方を最初に明らかにしたのが，ベイリー（§429）である。事実，その次の問題（§430）は，つぎのようなものである。「一定額を終身保険に付した人が，その請求権を放棄する場合に，かれに支払われるべき金額を求めること」　そしてその解はまさに，保険料積立金の最初の基本方程式 $V_m = A_{x+m} - P_x \cdot a_{x+m}$を示す。そして§432 は，極く簡潔な言葉で，この方法により，ある生保会社の全保有契約に対しても債務額（保険料積立金）が計算され，その大きさに応じた資産価値が存在しなければばらないとのべている。第 2 の基本方程式 $V_m = (P_{x+m} - P_x) \cdot a_{x+m}$は，ミルン（Milne, A Treatise on the Valuation of Annuities and Assurances,Londo,1815, p.283）に見出されている。 ⇒

上記のベイリーの 2 つの版の引用より，下線の部分は適切でない．a_xは昔の$\ddot{a}_x$

『生命保険史(1963)』(H.ブラウン著，水島一也　訳 p.277）

《資料 No9》

QUESTION XXXIV.

§ 430. To find the sum that ought to be given to a person, who is assured for the whole term of his life, for a given sum, in order that he may *renounce his claim* thereto.

QUESTION XXXIV.

§ 430. To find the sum that ought to be given to a person, who is assured for the whole term of his life, for a given sum, in order that he may *renounce his claim* thereto.

§430．終身保証されている人が，彼の保険金請求を放棄する場合に，与えられた保険金額に対し，その人に与えられるべき金額を求める．(拙試訳)

458　PRACTICAL QUESTIONS.　*Ch.* 12.

SOLUTION.

Subtract the equal annual payment, which he has been giving since the assurance commenced, from the equal annual payment which ought to be given for the assurance of the given sum on the life at its *present* age; multiply the remainder by the value of an annuity (increased by unity*) on the life at its present age: the product will be the sum required.

Francis BAILY: The Doctrine of Life-Annuities and Assurances (1810) pp.457-458
フランシス・ベイリー：
『年金と保険の原理（1810 年版)』

保証が開始されて以来，その人が支払い続けている年払平準保険料を，与えられている生命保険金額の保証のために支払われるべき現在年齢における年払平準保険料から差し引く．現時点での生命年金価額（に 1 を増加したもの）をその差額に掛ける．この積が必要な金額となる．(拙試訳)

${}_tV_x = (P_{x+t} - P_x) \cdot \ddot{a}_{x+t}$　（第 2 基本等式）

458　PRACTICAL QUESTIONS.　*Ch.* 12.

SOLUTION.

Multiply the equal annual payment, which he has been giving since the assurance commenced, by the value of an annuity (increased by unity*) on the life at its present age; subtract the product from the value of the assurance of the given sum on the life at its present age: the difference will be the sum required.

Francis BAILY: The Doctrine of Life-Annuities and Assurances (1813) pp.457-458
フランシス・ベイリー：
『年金と保険の原理（1813 年版)』

保証が開始されて以来，その人が支払い続けている年払平準保険料を，現在年齢における現時点での生命年金価額（に 1 を増加したもの）に掛ける．その積を現在年齢における与えられた生命保険金額の保険価額から差し引く．この差が必要な金額となる．(拙試訳)

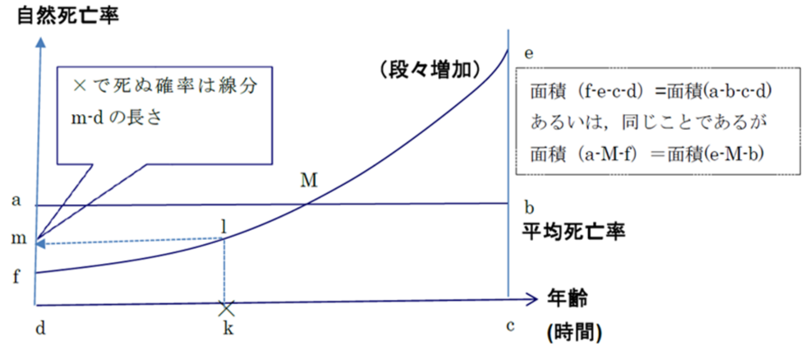
${}_tV_x = A_{x+t} - P_x \cdot \ddot{a}_{x+t}$　（第 1 基本等式）

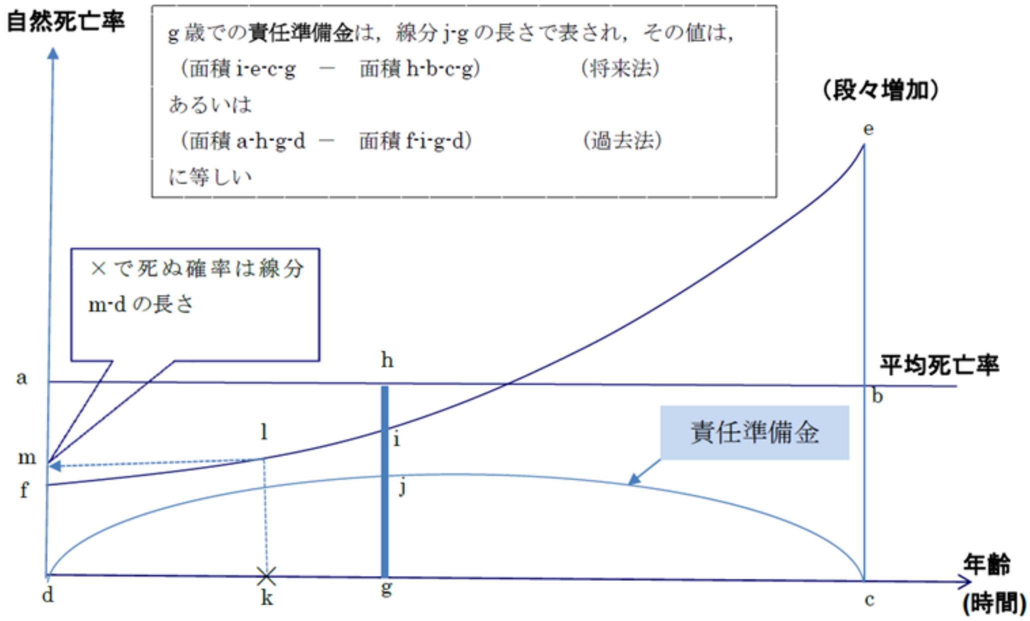
《資料 No9》続き

【責任準備金の略説】

責任準備金とは，保険会社が将来の保険金や給付金を支払うために積立てておくべき負債であり，保険数学において最も重要な概念の一つでもある．

右図に示した平均死亡率（≒平準払純保険料）の仕組みから必然的に現れる責任準備金について，直感的な図説を与えておく．





30 歳男性で 20 年満期の定期保険を考えてみよう．つまり d 時点で 20 歳，c 時点で 50 歳となる．このとき年齢 g において，将来の支払保険金は外枠 i-e-c-g で囲まれる図形の面積値になると予想され，一方，収入保険料は，長方形 h-b-c-g の面積値になると予想されるので，（面積 i-e-c-g －　面積 h-b-c-g）の値の積立金が準備されていないと将来の支払いが賄いきれないであろうことが分かる．この値は（面積 a-h-g-d －　面積 f-i-g-d）とも等しいことは，面積 f-e-c-d が面積 a-b-c-d であることから分かるであろう．以上から，年齢 g における責任準備金は，（面積 i-e-c-g －　面積 h-b-c-g）の値（これを将来法による責任準備金と言う）であり，かつ（面積 a-h-g-d －面積 f-i-g-d）の値（これを過去法の責任準備金と言う）とも等しい．この値が線分 j-g の長さに等しくなるように責任準備金を表す曲線 d-j-c を定める．

※上記の責任準備金の説明は，簡単のため，予定利率を考慮せず，自然死亡率を連続曲線として扱うなど，通常とは異なり，精確なものではないことに注意しておく．参考までに，保険料年払，保険金期末払の n 年満期で保険金 1 の定期保険に x 歳で加入した場合の t 年目の責任準備金を保険数学の記号によって正確な定義式（第一基本等式）で表現しておく．

$$ {}_tV^{1}_{x:\overline{n|}} = A^{1}_{x+t:\overline{n-t|}} - P^{1}_{x:\overline{n|}} \cdot \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}} $$

《資料 No10》

TEMPORARY ANNUITIES. 127

$$a_{(m,\, m_1,\, m_2,\, \&c.)_{\overline{p}|}} + a_{(m,\, m_1,\, m_2,\, \&c.)_{|\overline{n}}} = a_{m,\, m_1,\, m_2,\, \&c.}$$

by transposition, $a_{(m,\, m_1,\, m_2,\, \&c.)_{|\overline{n}}} = a_{m,\, m_1,\, m_2,\, \&c.} - a_{(m,\, m_1,\, m_2,\, \&c.)_{\overline{p}|}}$

Rule. From the value of an annuity for the whole term of life, subtract the value of an annuity deferred for the number of years which the temporary annuity has to continue; the difference will be the required value of the temporary annuity.

138. By Davies's method

$$a_{(m)_{|n}} = a_m - a_{(m)_{\overline{n}|}} = \frac{N_m}{D_m} - \frac{N_{m+n}}{D_m} = \frac{N_m - N_{m+n}}{D_m}.\quad \text{(Art. 112 and 136.)}$$

年金及び復帰年金の評価について(1843)
デヴィド・ジョーンズ

(注 1)上記の最終行は　$a_{(m)n]} = a_m - a_{(m)\,]\,n}$　の誤りであろう.
(注 2)現在の記法ならば$a_{(m)n]}$ の年齢には x を使い，()で囲ったりはしない．$a_{x:n]}$ とする．
(注 3)ここでの畳記号の使い方は，明らかに，次に掲げる Milne の著作の影響を受けている．
(注 4)基数による表示部分に対して，「Davies の方法」と書いていることから，この当時のイギリスでは基数法はｸﾞﾘﾌｨｽ・ﾃﾞｲｳﾞｨｽによって創り出されたものと考えられていたことが分かる．

58 ON THE PROBABILITIES AND

93. Let us denote this deferred expectation by $_{|\overline{t}}a$; then, for *B*, it will be $_{|\overline{t}}b$; for *C*, $_{|\overline{t}}c$, &c.

94. The duration of life that *A* has at present the expectation of enjoying, before the expiration of the term of *t* years, which we will denote by $_{\overline{t}|}a$; together with that which he has the expectation of enjoying after that term, ($_{|\overline{t}}a$), are evidently equal to his whole expectation of life (a); that is to say, $_{\overline{t}|}a + {}_{|\overline{t}}a = a$; therefore $_{\overline{t}|}a = a - {}_{|\overline{t}}a$; also, $_{\overline{t}|}b = b - {}_{|\overline{t}}b$, $_{\overline{t}|}c = c - {}_{|\overline{t}}c$, &c.

生存者及び残存者に対する年金と保険の評価についての研究論文(1815)　ジョシュア・ミルン

Art. 2. If for x in the expression M_x signifying some function of x, we write separately $x=n$, $x=n+p$, $x=n+2p$, $x=n+3p$, &c. x increasing by the continual addition of p; then the sum of the terms commencing with $x=n$ and finishing with $x=m$, is $M_n + M_{n+p} + M_{n+2p}$ &c. ... M_m; and to express this operation on x, I use the symbol $\begin{smallmatrix} x \\ p \\ n \\ m \end{smallmatrix}\Big|$ prefixed to the function of x; that is, I should write $\begin{smallmatrix} x \\ p \\ n \\ m \end{smallmatrix}\Big| M_x$ for this sum. This is the same as what is called the finite integral of

生命確率の評価に応用可能な解析と記号の素描(1820)　ベンジャミン・ゴンパーツ

《資料 No11.》

Fractiones in infinitas series reducuntur per divisionem et quantitates radicales per extractionem radicum, perinde instituendo operationes illas in speciebus ac institui solent in decimalibus numeris. haec sunt fundamenta harum reductionum: sed extractiones radicum multum abbreviantur per hoc Theorema.

$$\overline{P+PQ}\Big|^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \frac{m-3n}{4n}DQ + \&$$

《ニュートンが史上初の分数冪の二項展開定理を披露したオルデンバーグへの手紙(1673 年 6 月 13 日）》

《資料 No12》

$$l_x = ks^x g^{c^x}$$ （メーカムの法則）

に現れる定数c（メーカム自身は q と表記）に対する メーカムの分析

※但し，l_xは生命表におけるx歳の生存者数を表す．

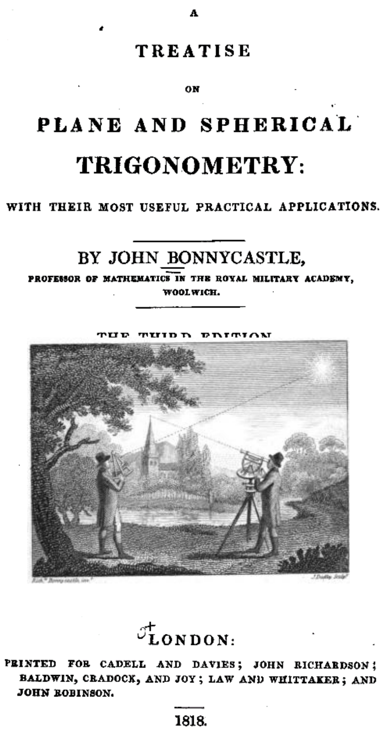
こうして拡張されたゴンパーツの法則は，次のように述べられるかもしれない：各個人の生命力または回復力は，等しい時間に等しい割合で失われていく．そのようにして失われた生命力の割合は，ほぼ同じであり，概ね log c =0.04 であると表される．
『ゴンパーツの法則の更なる進展について(1890)』J.I.A.,Vol.28, p.319（拙試訳）

生命表		$\log_{10}c$
１７社生命表（1843）		**0.0409075**
H^{MF} 第 1 曲線		**0.04202225**
H^{MF} 第 2 曲線		**0.0395573**
H^{MF} 平均曲線		**0.0400008**
１７社生命表平均曲線		**0.03956**
米国 30 社生命表		**0.04128**
ゴータ生命保険会社		**0.039625**
H^{M}（テキスト）総合曲線		**0.03965686**
上記はメーカム自身の論文からの引用（H^{MF}：ｱｸﾁｭｱﾘｰ会表(1869)） 下記は拙調査結果		
スイス（1920－21）	男性	0.038767154
商工省日本経験生命表		0.038262407
第 4 回日本全会社生命表（79－80）	男性	0.046266446
標準生命表 1996	男性	0.050020283
標準生命表 2007	男性	0.051430036
標準生命表 2018	男性	0.044822037

50～60 歳以後の年齢にこの法則を適用する場合，通常，以下の範囲
$1.08 < c < 1.12, 0.997004 < s < 0.99900, 0.991215 < g < 0.999987$

『生命保険数学の基礎（山内恒人）』p88　$\log_{10}\frac{1.08+1.12}{2} \fallingdotseq 0.04$

《資料 No13》


A
TREATISE
ON
PLANE AND SPHERICAL
TRIGONOMETRY:
WITH THEIR MOST USEFUL PRACTICAL APPLICATIONS.

BY JOHN BONNYCASTLE,
PROFESSOR OF MATHEMATICS IN THE ROYAL MILITARY ACADEMY,
WOOLWICH.

THE THIRD EDITION

LONDON:
PRINTED FOR CADELL AND DAVIES; JOHN RICHARDSON;
BALDWIN, CRADOCK, AND JOY; LAW AND WHITTAKER; AND
JOHN ROBINSON.
1818.

ボニーキャッスルの三角法への鍵（1812）：

ジョン・ボニーキャッスルというのはデイヴィスが創り出した架空の数学教師の名前である．当時の表紙を見ると何気なくデイヴィスの名前が潜んでいることが見て取れる．本書には，これこそがこの本の最大のセールスポイントであったのだが，多数の図が付けられている．ただそのために，彼は自分の手でブロック図を何枚も画かなければならなかったのだが，ここで若い頃に修行した鉄筆でのスレート作成の技を遺憾なく発揮してみせた．

ゴンパーツとグリフィス･デイヴィス（1788 – 1855）

グリフィス・デイヴィスが，1821 年(33)，ガーディアン火災・生命保険の立ち上げに関与していた紳士に個人教授をしていた関係から，会社の企画者から助言と援助を求められ，必要な生命表の作成を行った．翌年(34)，彼は，同社のコンサルティング・アクチュアリーに任命された．また，同年，ジョージ・スティーブンス卿によって設立された復帰益組合のアクチュアリーにもなり，1823 年末(35)には，ガーディアンの常務永年アクチュアリーに任命され，その名誉ある職にその後 1854 年まで 30 年以上に亘り留まり続けることになる．

デイヴィスがガーディアンのアクチュアリーになったことは，この会社にとって幸運だった．なぜなら，この会社の成功はデイヴィスの新しい生命表に依るところが大きかったからである．ちなみに，彼がアクチュアリーに任命されたときのこのポストの競争相手の 1 人は，当時すでに王立協会のフェローだったゴンパーツであった．ゴンパーツがユダヤ人であったことが理由で彼の任命が見送られたエピソードは，会報の拙論で触れた通りである．しかし，ゴンパーツは，ライバルであったデイヴィスに対しては狭量な恨みを持つようなことは一切なく，それどころか 1831 年に，彼(43)を王立協会のフェローに個人的に推薦しており，デイヴィスはその名誉ある地位に選出されることができた．そして，デイヴィスもゴンパーツのこの寛容さや親切に対して破格の表現で称えた．スキャンダラスな一部の経営者の人種差別が，歴史に残るアクチュアリーたちに暗い影を落とすことはなく，むしろ「ゴンパーツのアクチュアリー職不採用挿話」の美しいエピローグとして昇華されることになった．

《資料 No14》

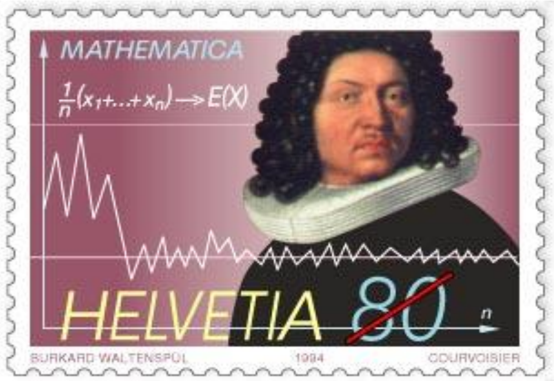
利力（＝瞬間利率） δ と実利率iと転化回数 n の名称利率$i^{(n)}$の関係式

$$e^{\delta}=1+i=\left(1+\frac{i^{(n)}}{n}\right)^{n}$$

瞬間利率の定義：ヤーコブ・ベルヌイ（35 歳）
『観察諸表からの終身年金価値計算の最簡便法(1690)』

数列$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$の収束性：ヤーコブ・ベルヌイ（29 歳）1683 年
⇒この結果がないとe^{δ}の収束性が保証されない

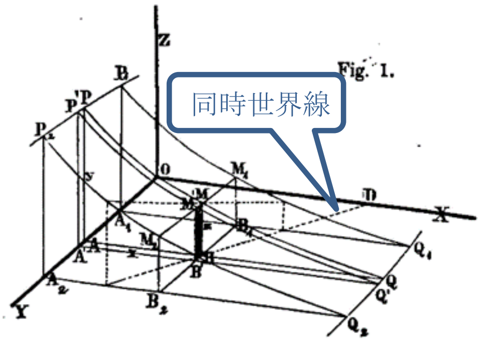
記号 e の定義：オイラーが 1727 年 21 歳のときの草稿で初出
出版物では，30 歳のとき発表した『力学(1736)』が初出



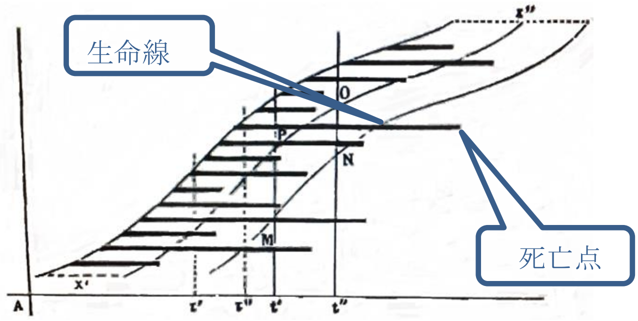
ヤーコブ・ベルヌイ
(1655 - 1705)

（ヤーコブ・ベルヌイと大数の法則）大数の法則は，幾何学や方程式のように確定した内容を指し示す命題ではない．この種の原理をどのように証明すれば良いかというのは極めて難しい問題であったと思われる．歴史的にこの難問に先鞭を付けたのは，ヤーコブ・ベルヌイで，『推測術』(1713)のなかの第 4 部「政治，倫理，経済における理論の利用と応用」に現れている．彼の死の 1 年前である 1704 年に，ヤーコブ(50)からライプニッツ(58)へ送った手紙を見ると，次のような興味深い壺の思考実験を提唱している．この壺は不思議な壺で，中に無数の白と黒の小石の入っており，一個取り出すと，自動的に中の小石は 1 個増えて元に戻るとしておく．このとき，壺から取り出した石の白と黒の比率は，取り出す数が増えるに従って，壺の中の石の白と黒の比率に近づいて行くであろう．ヤーコブ(50)は大数の法則に繋がるこの問題に部分的証明を与えた．更に，ヤーコブは，このような観念的な問題だけではなく，確率論を広く社会，倫理，経済にも応用しようと考えており，例えば人の余命を計算する方法も研究していた．その際，ヨハン・デ・ウィット（会報拙論参照）の論文を参照したいと思い，その論文を貸してくれるようにライプニッツに頼んだが，結局，見せてもらえなかった．ヤーコブはベルヌイ数、大数の法則、ベルヌイ試行を含む著書『推測術』の準備をしていたが、結核のため力尽き 50 歳で亡くなった．本著は甥のニコラスにより 8 年後に補足されて出版された．

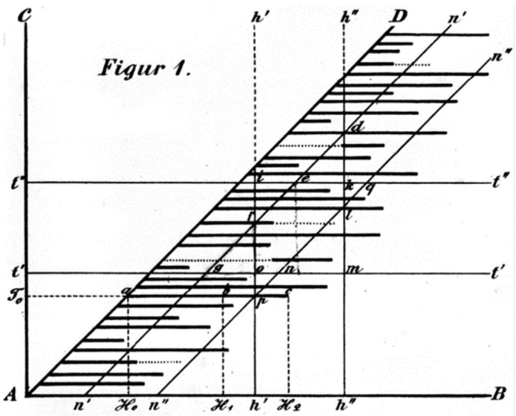
《資料 No15》



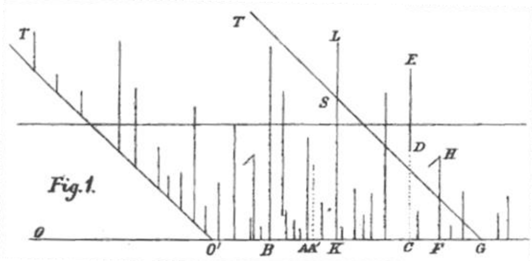
ツォイナーの図（1869）



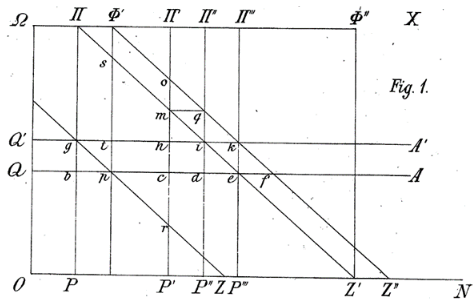
クナップの図（1874）



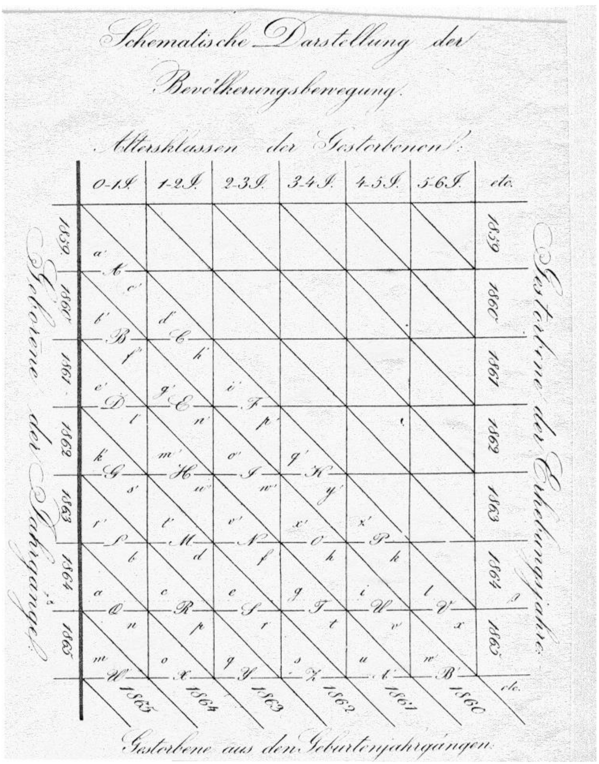
ベッカーの図（1874）



フェルヴァイの図（1875）



レキシスの第１図（1875）



ブラッシェ図（1870）

［人口統計図示法の分類］

	x軸×y軸（×z軸）	型	初出
平面	誕生の瞬間×年齢	フェルヴァイ- レキシス型	1875 1875
	時間×年齢	ブラッシェ型	1870
	時間×誕生の瞬間	ベッカー型	1874
立体	年齢×誕生の瞬間×生存人口	ツォイナー型	1869

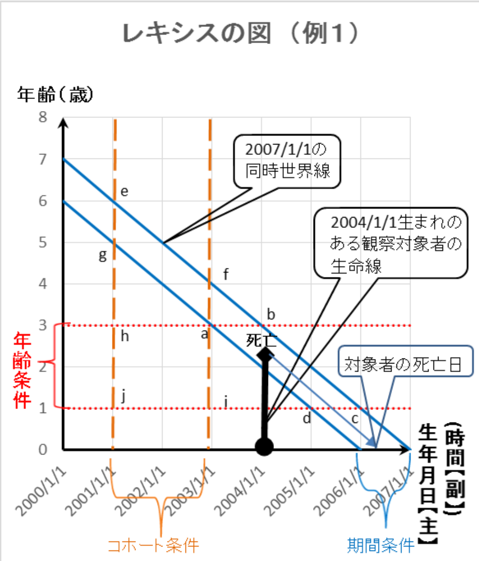
《資料 No15》続き

【レキシスの図の略説】

レキシスの図とは，縦軸に年齢，横軸に主たる座標としては生年月日が与えられ，**同時世界線**という補助線を使うことで，時間が副次座標として横軸に重ねられた図式のことであり，その枠内に観察対象集団の**生命線**を理念的に描き入れることで観察対象集団の人口動態を視覚的に分析することが可能となる．

レキシスの図に現れる 3 つの座標は，人口統計を考える上で，基本となる次のような 3 つの**観察原理**に対応しており，レキシスの図示法とはこれら３つの観察原理を平面上に視覚化する作図法の一種とも言えよう．

１．コホート（同時出生経験集団）観察原理　⇒　世代効果を観察
２．期間観察原理　⇒　時代効果を観察
３．年齢観察原理　⇒　年齢効果を観察



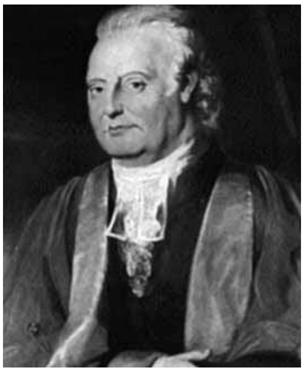
もう少し，具体的にレキシスの図と観察原理の関係を説明しよう．今，縦軸として観察対象者の年齢，横軸として生年月日をとることにする．そして，例えば，　2004 年 1 月 1 日生まれのある対象者が２歳になってから半年後に死亡したとき，その対象者の「生命線」を左図のように横軸上の生年月日を起点として上方に垂直に伸ばしていき，生命線の途切れる点を**死亡点**と呼ぶことにする．このとき，この観察対象者の死亡は，右下がりの２本の平行線と横軸に平行な２本の平行線から生成される平行四辺形 abcd の中に位置することが分かる．

この平行四辺形の横軸に平行な２直線に挟まれた領域（1 歳の直線は含める）は，対象者の年齢が 1 歳になった瞬間から３歳になる直前までの間であることを意味している．対象者をこのように年齢による条件で観察することを**年齢観察原理**という．一方，右下がりの２本の平行線で挟まれた領域（2006/1/1 の直線は含める）は，2006 年 1 月 1 日から 2006 年 12 月 31 日の期間を表し，このように観察時期による条件で観察することを**期間観察原理**という．この右下がりの直線は，「同時世界線」であり，横軸との交点，上記の例では 2006 年 1 月 1 日や 2007 年 1 月 1 日，の表す瞬間をこの平面グラフ上に示したものである．例えば，2006 年 1 月 1 日にある対象者が生まれた瞬間，2000 年 1 月 1 日に生まれた対象者は満 6 歳になり，2002 年 1 月 1 日に生まれた対象者は満 4 歳になることが見て取れるであろう．

従って，平行四辺形 abcd の中にある死亡点の数は，2006 年 1 月 1 日から 2006 年 12 月 31 日の間に 1 歳か 2 歳で死亡した観察対象者の人数を表しており，2004 年 1 月 1 日に生まれてから 2 年半で死亡した対象者は，2006 年に満 2 歳で死亡していることになるから，その観点からもその対象者の死亡点がこの平行四辺形 abcd に含まれることが理解される．

最後に縦軸に平行な 2 直線に挟まれた領域（2001/1/1 の直線は含める）は，対象者が 2001 年 1 月 1 日から 2002 年 12 月 31 日に生まれたことを表している．対象者をこのように誕生年月日による条件で観察することを**コホート（同時出生経験集団）観察原理**という．

《資料 No16》



エドワード・
ウェアリング
(1736-1798)

ウェアリングの問題

全ての自然数 k ≥ 2 に対して、「全ての自然数は s 個の非負の k 乗数の和で表される」という性質を満たす整数 s が存在するかという問題．最終的に，1909 年，ヒルベルトにより肯定的に解決された．

ジョージ・キング
(1846-1932)

【包除原理(現代版）】

$1 \le N \le m$なる任意の整数Nに対して，m個の確率事象$B_1, \cdots, B_m$の中で，ちょうどN個が同時に起こる確率$\mathrm{P}_{[N]}$は次式で与えられる．

$$\mathrm{P}_{[N]} = \mathrm{S}_N - \binom{N+1}{N}\mathrm{S}_{N+1} + \binom{N+2}{N}\mathrm{S}_{N+2} - + \cdots \pm \binom{m}{N}\mathrm{S}_m$$

ただし，S_kは対称和 $S_k = \sum \Pr\left(B_{j_1} \cap B_{j_2} \cap \cdots \cap B_{j_k}\right)$ によって定義され，$S_0 = 1$とする．S_kのΣはm個中k個の事象を選び出す組合せ総数$\binom{m}{k}$通りについて合計したものを表す．

【ウェアリングのアクチュアリー公式(1792) 抜粋】

S,S',S'',S'''等は，上述の被保険者たちN,M,P,Q等の連合生命(a)に対するすべての年金現価のそれぞれの集合を表すものとする．そのとき，上述のすべての生存者(a)人と残りの死亡者(b)人に対する年金現価の集合は次のようにならなければならない．

$$S - (a+1)S' + (a+1)\cdot\frac{a+2}{2}S'' - (a+1)\cdot\frac{a+2}{2}\cdot\frac{a+3}{3}S''' + \cdots$$

『代数的量を確率的な関係式と年金に変換する原則について』p.37
(拙試訳)

※下記の左辺の記号の定義：x_1才，x_2才…x_m才の人の中で，丁度 r 人が n 年後に生き残る確率

【キングの Z 法(1902)】

Z^rの冪の意味なし

$${}_np\frac{[r]}{x_1 x_2 \cdots x_m} = \mathrm{Z}^r - \binom{r+1}{1}\mathrm{Z}^{r+1} + \binom{r+2}{2}\mathrm{Z}^{r+2} - \binom{r+3}{3}\mathrm{Z}^{r+3} + \cdots$$

意味あり

$$= \frac{\mathrm{Z}^r}{(1+Z)^{\mathrm{r}+1}}$$

冪の意味から形式的に導出

ならば ${}_np\frac{r}{x_1x_2\cdots x_m} = \frac{\mathrm{Z}^r}{(1+Z)^{\mathrm{r}}}$

※上記の左辺の記号の定義：x_1才，x_2才…x_m才の人の中で，少なくとも r 人が n 年後に生き残る確率

ただし，ここでのZ^tは単なる記号であり，Zを t 回掛けているわけではない．その定義は，$\mathrm{Z}^t = \sum {}_np_{x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_{r+t}}}$ であり，Σは m 人中(r+t)人を取り出す全ての組み合わせについて合計したもので，Z^{m+1}以後の項は 0 と定めるものとする．